Dortmund 1973

Mathematik als Handlung

Die Bedeutung der Arbeiten Paul Lorenzens für eine Didaktik der Mathematik

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Erziehungswissenschaften

an der

Pädagogischen Hochschule Ruhr

vorgelegt von

Rudolf Jeuck

aus Köln

Drucklegung: Februar 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536502_0006

Mathematik als Handlung

Die Bedeutung der Arbeiten Paul Lorenzens für eine Didaktik der Mathematik

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Erziehungswissenschaften

an der

Pädagogischen Hochschule Ruhr

vorgelegt von

Rudolf Jeuck

aus Köln

Drucklegung: Februar 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. Klaus Wagner
Koreferenten: Prof. Dr. Lothar Eley
Dozent Dr. Günter Simm

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Januar 1973

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG I

Teil I

Wissenschaftstheoretische Analysen des mathematischen Handlungsbegriffs

§ 1. Kants Analysen des Konstruktiven in der Mathematik 1

§ 2. Die Bemühungen der Griechen um eine Grundlegung der Mathematik 22

a) Die Geometrie als axiomatische Methode 22

b) Konstruierbarkeit als Postulat der antiken Geometrie 26

c) Die Axiome des Euklid als Leitsätze für die Konstruktion der Geometrie 27

d) Das Auftreten der Spannung Axiomatizismus - Konstruktivismus 28

e) Axiomatizismus - Konstruktivismus in ihrer Bedeutung für die Praxis 29

f) Die Wandlungen des antiken geometrischen Handlungsbegriffs in der modernen Mathematik 30

g) Die Genesis der Zahlbildung 32

Teil II

Der Aufbau der Logik durch Lorenzen

§ 3. Die operative Logik Lorenzens 37

a) Vorbereitende Bemerkungen zur operativen Logik Lorenzens 37

b) Die Aufgabenrechnung Kolmogorows als operative Interpretation der intuitionistischen Logik 42

c) Wittgensteins Analyse der Operation; wiederholbare Handlungen 46

d) "Wie oft" - "Wie viel" 50

e) Logische Schlüsse als Handlungen 52

f) Protologik, geregelte Handlungen als Anfang der formalen Logik 53

g) Der Übergang von der Protologik zur formalen Logik 88

§ 4. Dialogische Einführung in die formale Logik ... 107

a) Wahrheit, Falschheit, wahrheitsdefinite -, beweisdefinite -, dialogdefinite Aussagen .. 107

b) Aufbau der formalen Logik im Ausgang von Dialogen 114

c) Der Zusammenhang zwischen der operativen Methode geregelter Handlungen und der operativen Methode rein sprachlicher Handlungen (Dialoge) beim Aufbau der formalen Logik ... 129

§ 5. Lorenzens Versuch der Konstruktion einer Wissenschaftssprache 132

a) Die "Logische Propädeutik" als Vorschule der Sprachdisziplinierung 132

b) Analyse der Begriffe Abstraktion und Menge auf der Basis der "Logischen Propädeutik" .. 134

c) Die Logik dialogdefiniter Aussagen auf der Basis der "Logischen Propädeutik" 140

Teil III

§ 6. Untersuchungen zu einem operativen Aufbau der Arithmetik und Analysis im Sinne Lorenzens 143

a) Die Fundierung der Analysis in Handlungen .. 143

b) Die operative Methode zum Aufbau der Arithmetik; Wittgensteins Analysen zur "Unerbittlichkeit mathematischer Sätze" 146

Teil IV

§ 7. Analysen zur operativen Behandlung der Geometrie 159

a) Begründung der Geometrie durch Lorenzen 160

b) Kurze Darstellung der Dinglerschen Methode; Handlung als Stütze seines Systems 169

c) Kritische Bemerkungen zu Dinglers Methode; ihre modifizierte Übernahme durch Lorenzen . 184

d) Dinglers Aufbau der euklidischen Geometrie als ein Versuch, die unmittelbare Verbindung mit dem manuellen Herstellungsverfahren geometrischer Formen zu leisten; Geometrie als Weise menschlicher Produktivität 186

LITERATURVERZEICHNIS 194

"Wir haben die Wahrheit nicht, sondern
sie will durch Handeln gewonnen sein" [1].

Einleitung

Diese Arbeit setzt sich zum Ziel, das Lorenzen-Programm einer operativen Begründung der Mathematik und Logik zu analysieren und ihren Nutzen für eine Didaktik der Mathematik darzulegen. Dazu muß mit Notwendigkeit auf die Frage nach der Fundierung der Mathematik, auf das Problem des Ursprungs mathematischen Wissens eingegangen werden. Die vorliegende Arbeit bemüht sich somit um die für eine Mathematikdidaktik so wichtige Herstellung eines Netzes von Verwebungen der Wissenschaftsregionen Logik, mathematische Grundlagenforschung und Philosophie. Es soll das von den Mathematikern als "selbstverständlich" in ihrem mathematischen Denken Mitbenutzte herausgeschält und damit ein Beitrag geleistet werden zur Aufhellung dessen, was Mathematik überhaupt ist, worin die Bedingungen ihrer Möglichkeit liegen.

Die bedeutende Erkenntnis Lorenzens und ihre praktische Umsetzung durch ihn liegt darin, daß sich Mathematik und Logik Handlungen verdankt. Jene Handlungen werden im folgenden in solchem Umfang reflektiert, wie ihre Herabsetzung in Logik und Mathematik eine für die Mathematikdidaktik tragende Bedeutungsfunktion annimmt. Die Selbstvergessenheit des Mathematikers in seinen mathematischen Handlungen soll so weit hervorkommen, daß hierin eine Didaktik zu verwertende Stützen finden kann.

---

1) H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1928, S. 14

Teil I

Wissenschaftstheoretische Analysen des mathematischen Handlungsbegriffs

§ 1. Kants Analysen des Konstruktiven in der Mathematik

Die mathematischen Urteile wurzeln nach Kant in der reinen Anschauung, ihre Grunddisziplinen Geometrie und Arithmetik korrespondieren den beiden Anschauungsformen Raum und Zeit, in ihr gliedert die reine Anschauung mögliche Gegenstände der Erkenntnis in einem Nebeneinander bzw. Nacheinander. Raum meint für Kant reine Anschauungsform, durch die äußere Anschauungen erst ermöglicht sind. Zusammen mit der Zeit als Form der inneren Anschauung [1] rechnet Kant sie zu den transzendentalen Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung.

Zeit liegt der Arithmetik zugrunde, doch, wie schon eine oberflächliche Untersuchung vermittelt, nicht in gleicher Weise wie Geometrie auf der reinen Anschauungsform Raum basiert: Zahlen [2] sind diskret im Gegensatz zu den kontinuierlichen Materialien der Geometrie, den geometrischen Figuren. Kant behandelt deshalb die Zahl in ausführlichen Erörterungen im Kapitel "Von dem Schematismus der reinen Verstandesbegriffe" innerhalb der transzendentalen Analytik, die über diesbezügliche Untersuchungen der transzendentalen Ästhetik weit hinausgehen [3].

---

1) Zeit als Gegenstand der Physik bedarf der Realisation im Raum, etwa durch periodische Vorgänge.
2) Gemeint sind die natürlichen Zahlen.
3) Vgl. Kant, Kritik der reinen Vernunft.

Das transzendentale Schema ist vermittelnde Vorstellung zwischen den reinen Verstandesbegriffen und den Erscheinungen, die Anwendung der ersteren auf die letzteren ermöglichend: "Diese vermittelnde Vorstellung muß rein (ohne alles Empirische) und doch einerseits i n t e l l e k t u e l l , andererseits s i n n l i c h sein" [1].

Verstandesbegriffe enthalten die synthetische Einheit des Mannigfaltigen überhaupt, Zeit als formale Bedingung des Mannigfaltigen des inneren Sinnes "enthält ein Mannigfaltiges a priori in der reinen Anschauung" [2].

Um eine Subsumtion der Erscheinungen unter die Kategorien zu eröffnen, d. h. die Anwendung der letzteren auf die ersteren zu ermöglichen, muß die vermittelnde transzendentale Zeitbestimmung sowohl mit den Erscheinungen als auch den Kategorien Gleichartigkeit enthalten: Ihre Allgemeinheit und das Beruhen auf einer apriorischen Regel einerseits, das Vorhandensein "der Zeit in jeder empirischen Vorstellung des Mannigfaltigen" [3] andererseits leistet das Geforderte. Reine Verstandesbegriffe enthalten außer ihrer kategorialen Funktion "noch formale Bedingungen der Sinnlichkeit" [4], die erst Kategorien in ihrer Anwendung auf Gegenstände gestatten.

Kant nennt die reinen, formalen Bedingungen der Sinnlichkeit, als Beschränkung des Verstandesgebrauchs "Schema dieses Verstandesbegriffs" [5].

Schema als Produkt der Einbildungskraft hat damit Anteil am synthetischen Charakter dieser, "die Einheit in der

---

1) KdrV B 177
2) KdrV B 177
3) KdrV B 178
4) KdrV B 179
5) KdrV B 179

Bestimmung der Sinnlichkeit allein zur Absicht hat" [1], und somit von der Synthesis einzelner Anschauungen wohl unterschieden ist.

Dagegen bedarf nun der Gegensatz Schema - Bild der Aufklärung. "So, wenn ich fünf Punkte hintereinandersetze, ... ist dieses ein Bild von der Zahl fünf. Dagegen, wenn ich eine Zahl überhaupt nur denke, die nun fünf oder hundert sein kann, so ist dieses Denken mehr die Vorstellung einer Methode, einem gewissen Begriffe gemäß eine Menge (z. E. tausend) in einem Bilde vorzustellen, als dieses Bild selbst, welches ich in letzterem Falle schwerlich würde übersehen und mit dem Begriff vergleichen können" [2].

Schema zu einem Begriffe, hier im besonderen Fall der Zahl, meint also das H e r s t e l l u n g s v e r f a h r e n , einem Begriff sein Bild, seine Figur in der Anschauung zu liefern.

Die Bestimmung unserer Anschauung gemäß einer Regel liegt wegen der Unerreichbarkeit der sinnlichen oder empirischen Begriffe durch Gegenstände der Erfahrung oder Bilder derselben diesen zugrunde.

Bild "als Produkt des empirischen Vermögens der produktiven Einbildungskraft" [3] ist erst ermöglicht durch Verknüpfung mit dem Schema sinnlicher Begriffe als Erzeugnis der reinen Einbildungskraft a priori.

Es gilt nun, die Differenz zwischen den Schematen der sinnlichen Begriffe und denen des reinen Verstandes auf-

1) KdrV B 179
2) KdrV B 179
3) KdrV B 181

zuhellen: "Dagegen ist das Schema eines reinen Verstandesbegriffs etwas, was in gar kein Bild gebracht werden kann, sondern ist nur die reine Synthesis, gemäß einer Regel der Einheit nach Begriffen überhaupt, die die Kategorie ausdrückt, und ist ein transzendentales Produkt der Einbildungskraft, welches die Bestimmung des inneren Sinnes überhaupt, nach Bedingungen ihrer Form, (der Zeit,) in Ansehung aller Vorstellungen, betrifft, sofern diese der Einheit der Apperzeption gemäß a priori in einem Begriff zusammenhängen sollten" [1].

Die einzelnen Vorstellungen werden demnach entsprechend jener Kategorie zur Einheit eines Begriffs übergeführt durch Angabe der zugeordneten Zeitform als reiner Synthesis der Einbildungskraft. Die Aufgliederung der transzendentalen Schemate nach der Ordnung der Kategorien liefert dann die über die transzendentale Ästhetik hinausgehende Behandlung der Zahl: "Das reine Bild aller Größen (quantorum) vor dem äußeren Sinne, ist der Raum; aller Gegenstände der Sinne aber überhaupt, die Zeit. Das reine S c h e m a der G r ö ß e aber (quantitatis), als eines Begriffs des Verstandes, ist die Z a h l , welche eine Vorstellung ist, die die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefaßt. Also ist die Zahl nichts anderes, als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge" [2].

Indem so Zahl und allgemein mathematische Figuren nur von den sie konstituierenden Verfahren, ihren Konstruktionen im Gegensatz zu den Analysen schon fertiger Figuren aufzuhellen ist, entfällt unter dem Blickwinkel Zahl

1) KdrV B 181
2) KdrV B 182

als Zahldarstellung die (notwendig) auftretende "ungenaue" Realisation in Figuren: Mathematische Figuren gewinnen also damit ihre Allgemeinheit primär unter dem Aspekt der Erzeugung, ihre Betonung als eine Form in diesem Zusammenhang erfährt damit eine Abschwächung [1].

"Man sieht nun aus allem diesem, daß das Schema einer jeden Kategorie, als das der Größe, die Erzeugung, (Synthesis) der Zeit selbst, in der sukzessiven Apprehension eines Gegenstandes, ..., enthalte und vorstellig mache" [2]. Das Schema der Größe, die Zahl, ist damit nichts anderes als eine Zeitbestimmung a priori nach Regeln, und zwar ausgehend auf die Zeitreihe "in Ansehung aller möglichen Gegenstände" [3].

Formelmäßig verkürzt und vereinfacht, entspricht nach Kant der Zahl demnach die Zeitreihe. Sie fungiert als die grundlegendste Zeitbestimmung, sie allein ergibt sich aus der Zeitbewegtheit ohne Ansehung auf Gegenstände, im Gegensatz zu anderen möglichen Bestimmungen, wie "Zeitinhalt", "Zeitordnung" und "Zeitinbegriff" - in der Ordnung der Kategorien.

Zur Erläuterung hierzu sei ein schon geliefertes Kant-Zitat nochmals zusammengezogen gesetzt: Zahl konstituiert sich dadurch, "daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge".

In Übereinstimmung mit Aristoteles gründet die Verstehbarkeit des Zahlbegriffs in der Zeitreihe. Dies geht auch konform mit Husserls Analysen in seiner "Philosophie der Arithmetik": Zahlen (mit einer möglichen Ausnahme von kleinen Zahlen) sind nur zugänglich im offenen

1) Siehe hierzu auch KdrV B 741
2) KdrV B 184
3) KdrV B 185

Horizont des weiterlaufenden Zählens, d. h., Zahlen basieren auf dem Akt der Zählhandlung und demnach wesentlich auf Zeit. Zählen meint nicht das an bestimmte konkrete Materialien gebundene Zählen etwa mit Steinen, Strichen oder Fingern, sondern als transzendentales Schema die Grundlage für jenes empirische Operieren, genauer ein zeitlich periodischer Rhythmus mit gesetztem Anfang.

Z ä h l e n h e i ß t p e r i o d i s c h e S y n t h e s i s v o n G l e i c h e m b e i f r e i e m A u f t a k t .

"Alle Vernunfterkenntnis ist nun entweder die aus Begriffen, oder aus der Konstruktion der Begriffe; die erstere heißt philosophisch, die zweite mathematisch" [1]. Die Konstruktion der arithmetischen Grundelemente, der Zahlen, vermöge des transzendentalen Schemas macht somit die Arithmetik zu einer im Kantischen Sinne mathematischen Disziplin.

Das Aufnehmen dieser Kantischen Ideen im Intuitionismus und Operationalismus wird später näher ausgeführt, ebenso die Nichterfüllung des Kantischen mathematischen Existenzprinzips für gewisse mathematische Theorien, etwa die im 19. Jahrhundert auftretenden nicht-euklidischen Geometrien: das Fehlen der Bedingung der Möglichkeit einer Konstruktion in Raum und Zeit, ihre Unbeschreibbarkeit als synthetische Urteile a priori, das Fehlen der reinen Anschauung. Sätze der nicht-euklidischen Geometrien lassen sich dann im Kantischen Begriffsnetz als "Ideen der reinen Vernunft" bezeichnen, mit den daraus resultierenden Konsequenzen.

---

1) KdrV B 865

Durch den Begriff der reinen Anschauung erfährt die Unterscheidung von Existenzmöglichkeit und Denkmöglichkeit ihre Berechtigung: Die letzte bindet sich notwendig an die Erfüllung im "Satz vom Widerspruch", während jedoch erst die reine Anschauung als Kriterium möglicher Existenz agiert.

Descartes' Einflüsse auf die Philosophie der Mathematik soll an dieser Stelle nicht nur deshalb kurz behandelt werden, weil er - zusammen mit Fermat - als Begründer der analytischen Geometrie [1] anzusehen ist, die neben Algebra und projektiver Geometrie den Anfang der sogenannten "modernen" Mathematik bildet, sondern weil er in besonderer Weise noch mit der Antike verhaftet bleibt. Seine Ausrichtung auf die antike axiomatische Methode dehnt Descartes in den "Regulae" und im "Discours" zu einem allgemein wissenschaftlichen Prinzip aus.

Mathematische Methode heißt für Descartes geometrische im antik-klassischen Sinne, darüber hinaus geht auch nicht seine symbolische Mathematik als Buchstabenrechnung: Entscheidendes Kriterium für Existenzbeweise bleibt die geometrische Konstruktion. Damit fallen aber etwa die nicht konstruierbaren Irrationalzahlen als mögliche Bereiche mathematischer Konstruktion fort: "Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren ... und gleich wie sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, ..., so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, daß

1) Descartes, La Géométrie, 1657

sie auf Bekanntes führen, nichts anderes zu tun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen, ..." [1].

Descartes läßt sich wohl mit Recht - aber trotzdem sehr grob gesprochen - in seiner reinen Anlehnung an die Geometrie antiker Ausprägung mit der hierin implizierten Existenzbasis durch finite Konstruktion als "Intuitionisten" bezeichnen, doch nur mit einer für diesen Standpunkt wesentlichen, von ihm nicht erkannten Charakterisierung: Die Spannung zwischen Intuitionismus und Formalismus ist für ihn noch nicht problematisch, ja sie kann es nicht sein. "Unter der ungebrochenen Vorherrschaft der traditionellen Ontologie ist über die echte Erfassungsart des eigentlich Seienden im vorhinein entschieden. Sie liegt im νοεῖν , der 'Anschauung' im weitesten Sinne, davon das διανοεῖν , das 'Denken', nur eine fundierte Vollzugsform ist. Und aus dieser grundsätzlichen ontologischen Orientierung heraus gibt Descartes seine 'Kritik' der noch möglichen anschauend vernehmenden Zugangsart zu Seiendem, der sensatio (αἴσθησις) gegenüber der intellectio" [2]. Mit anderen Worten: Es besteht ein problemloser Übergang von der Anschauung zum Denken, in der Weise, daß dieses in jener gründet.

Descartes' Mathematik bleibt der antiken verhaftet, da auch er ihre entscheidende Grundvoraussetzung beibehält: Als seiend sind solche mathematischen Gebilde anzusehen, die durch e n d l i c h e Konstruktion erzeugbar sind, d. h., Definitionen durch den Limesbegriff blieben unbekannt. Als Konstruktionsmaterial dienen reine Gestal-

1) O. Becker, Grundlagen der Mathematik, Freiburg / München 1954, S. 139 f.
2) M. Heidegger, Sein und Zeit, in: Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung VI, 1923

ten, wie etwa Kreis und Gerade, mit deren Hilfe und in ihnen gründend Irrationalitäten aufgewiesen werden, aber eben nicht durch einen unendlichen (konvergierenden) Prozeß erst zu definieren, sondern den Figurkonfigurationen der reinen Basisgestalten eigen sind.

Für Descartes existiert trotz seiner Einführung des Koordinatenbegriffs noch nicht die Gesamtheit der reellen Zahlen; wie aus dem obigen Zitat hervorgeht, liegt ein Grund hierfür in seiner Intention, die elementaren arithmetischen Prozesse auf die Geometrie zu übertragen. Er - ebenso die griechische Mathematik - erkennt nicht die Möglichkeit,mittels finiter Konstruktionen über den allgemeinen algebraischen Kurvenbegriff beliebige algebraische Irrationalitäten zu erzeugen, sondern bleibt, obwohl sein Ansatz potentiell darüber hinauszuweisen zuläßt, den elementaren Irrationalitäten (einfache Wurzelausdrücke) verhaftet. Insgesamt kann in Descartes also wohl nicht der Begründer der modernen formalen Mathematik gesehen werden.

Leibniz gründet die "moderne" Mathematik auf den arithmetischen Kalkül und nur auf diesen und verhilft ihr so zu einer eigenständigen Fundierung. Dieses für ihn charakteristische Moment der Arithmetisierung im Sinne einer Algorithmetisierung zieht sich durch seine Neuschöpfungen wie etwa Infinitesimalkalkül, analysis situs und formale Logik. Indem alle diese deduktiven Systeme in der Zeichenschrift der "allgemeinen Charakteristik" ausgedrückt werden, wird die "Mathesis" zur "Algebra universalis", die in "Logistik" (symbolische Mathematik der Quantität) zerfällt. Unter die zweite gehört auch die "geometrische" Charakteristik; damit ist endlich die Geometrie, von der Kombinatorik bestimmt, als mathemati-

sche Grundwissenschaft überwunden [1].

Zur Untermauerung dieser These sei Leibniz zitiert: "... Manches weist keine Teile auf und entzieht sich somit der Messung ... Dagegen gibt es nichts, was nicht der Zahl unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt und die Arithmetik eine Art Statik des Universums, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen" [2].

Es läßt sich nun zeigen, was freilich an dieser Stelle nur angedeutet sei, daß aus den Leibnizschen Begriffen der "Repräsentation", des "ordo in varietate" und der "Kontinuität" die Konstitution einer symbolisch-formalen, jegliche Intuition überschreitende Mathematik ermöglicht ist [3].

In Leibniz' Ausführungen liegt damit eine Übereinstimmung mit dem Hilbertschen Programm eines Formalismus vor, allerdings mit dem Unterschied, daß in seiner philosophischen Untermauerung eine stetige Abstufung von der abstrakten Ideenwelt Gottes bis hin zu der endlichen indefiniten Welt des menschlichen Geistes gemeint ist, und somit die Scheidung zwischen rein formaler und inhaltlicher Mathematik entfallen muß.

Im Gegensatz zu Leibniz finden sich bei Kant keine produktiven mathematischen Forschungen. Allerdings läßt sich in seiner Erstschrift "Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte" (1747) die Aufstellung der Möglichkeit einer der euklidischen fremden Geometrie herauslesen, ohne dort allerdings eine genaue Ausführung zu finden. Kant geht dabei von der Leibnizschen Monado-

1) O. Becker, Mathematische Existenz, in: Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung VI, 1923, S. 714
2) Leibniz, Philosophische Schriften VII, S. 184
3) Siehe O. Becker, a. a. O., S. 714 - 728

logie aus und verschafft sich so im "metaphysischen Verstande" Zugang zu isoliert nebeneinander bestehenden Welten, welche die Vollständigkeit ihrer Bestimmungen in sich selbst tragen.

Wegen der Zufälligkeit der Gesetzmäßigkeiten unserer Welt, z. B. ihre Dreidimensionalität, bleibt für andere Welten die Möglichkeit der von ihr verschiedenen Raumstrukturen offen. "Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte" [1]. Die nähere Struktur dieser denkbaren Raumesarten bestimme sich in Abhängigkeit von physikalischen Gesetzen, d. h., Kant rückt damit unter Berücksichtigung der Unabgeschlossenheit seiner Ausführungen in die Nähe der Kernidee der Einsteinschen Relativitätstheorie, wie in Übereinstimmung mit O. Becker wohl nicht allzu übertrieben interpretiert werden könnte.

"Weil wir die besonderen Bedingungen der Sinnlichkeit nicht zu Bedingungen der Möglichkeit der Sachen, sondern nur ihrer Erscheinungen machen können, so können wir wohl sagen, daß der Raum alle Dinge befasse, die uns äußerlich erscheinen möge, aber nicht alle Dinge an sich selbst, sie mögen nun angeschaut werden oder nicht, oder auch von welchem Subjekt man wolle. Denn wir können von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien, welche unsere Anschauung einschränken und für uns allgemein gültig sind" [2]. Die Unbekanntheit der Raumanschauung nichtmenschlicher, möglicherweise existierender Wesen läßt zwar freie Konstruktionen in arithmeti-

1) Kant, Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte, 1747, § 10
2) KdrV B 43

schem Gewande zu, doch bleiben für den Menschen wegen seiner Befangenheit in subjektiven Bedingungen seiner Anschauung nach Kant diese arithmetischen Struktur-Hypothesen geometrisch irrelevant, ja sie vermögen nicht einmal geometrischer Natur zu sein.

Die transzendentale Analyse eines solchen arithmetischen Begriffs oder Begriffssystems zeigt, daß sie sich auf Erscheinungen, also auf Gegenstände einer m ö g l i c h e n Erfahrung beziehen und nur auf sie beziehen können. "Ohne diese letzten hat er gar keinen Sinn, und ist völlig leer an Inhalt, ob er gleich noch immer die logische Funktion enthalten mag, aus etwaigen datis einen Begriff zu machen" [1]. Die empirische Anschauung aber erst gibt dem Begriff den Gegenstand und verbürgt die objektive Gültigkeit einer reinen Anschauung. Mathematische Begriffe und aus ihnen zusammengesetzte Strukturen erhalten erst ihren Sinn (= Bedeutung) nach Kant durch ihre notwendige Bezogenheit auf empirische Anschauungen, d. h. auf Gegebenheiten möglicher Erfahrung.

"Ohne dies haben sie gar keine objektive Gültigkeit, sondern sind ein bloßes Spiel, es sei der Einbildungskraft, oder des Verstandes, respektive mit ihren Vorstellungen" [2]. Will die Mathematik - zumindest die Geometrie - diesen Bedingungen genügen, so muß sie konstruktiv vorgehen; sie muß die den Begriffen korrespondierenden Gestalten sinnlich machen. "Der Raum hat drei Abmessungen, zwischen zwei Punkten kann nur eine gerade Linie sein, usw. Obgleich alle diese Grundsätze, und die Vorstellung des Gegenstandes, womit sich jene Wissenschaft beschäftigt, völlig a priori im Gemüt erzeugt werden, so würden sie doch gar nichts bedeuten, könnten wir nicht immer an

---

1) KdrV B 298
2) KdrV B 298

Erscheinungen (empirischen Gegenständen) ihre Bedeutung darlegen" [1]. Die Mathematik erfüllt nun die Forderung, ihren Begriffen Bedeutungen in den Erscheinungen zu verleihen "durch die Konstruktion der Gestalt, welche eine den Sinnen gegenwärtige (obzwar a priori zustande gebrachte) Erscheinung ist" [2].

Wenn auch die Arithmetik als sukzessive Synthesis von Einem zu Einem, durch reine Zeitbestimmung konstituiert werden muß, bleibt damit doch noch ihre Bedeutungs- und Anwendungssphäre unaufgeklärt. "Der Begriff der Größe sucht in eben der Wissenschaft seine Haltung und Sinn in der Zahl, diese aber an den Fingern, den Korallen des Rechenbrettes, oder den Strichen und Punkten, die vor Augen gestellt werden" [3].

Die Apriorität der mathematischen Begriffe, ihre synthetische Basis und die Zusammenfassung der aus ihnen entspringenden Begriffe zu Formeln, kann Anwendung bloß finden in der Erfahrung; die, soll sie solches leisten können, ihrer Möglichkeit nach - in purer Ansehung ihrer Form - in jenen Begriffen angelegt sein muß. In diesem Zusammenhang sei aus dem "schweren Geschäft" [4] der Philosophie der Mathematik noch auf die bekannte Stelle in der "Methodenlehre" verwiesen. In Ansehung der Form der Anschauung, Raum und Zeit, "können wir unsere Begriffe in der Anschauung a priori bestimmen, indem wir uns im Raume und der Zeit die Gegenstände selbst durch gleichförmige Synthesis schaffen, indem wir sie bloß als Q u a n t a betrachten. ... dieser ist der Vernunftgebrauch durch Konstruktion der Begriffe, indem diese, da

1) KdrV B 299
2) Ebenda
3) Ebenda
4) KdrV B 753

sie schon auf Anschauung a priori gehen, auch eben darum a priori und ohne alle empirische data in der reinen Anschauung bestimmt gegeben werden können" [1].

Der konstruktive Zug der Mathematik bindet sich an die für uns kontingenten Anschauungsformen von Raum und Zeit. "Aber im Raume eine Anschauung a priori zu bestimmen (Gestalt), die Zeit zu teilen (Dauer), oder bloß das Allgemeine der Synthesis von einem und demselben in der Zeit und dem Raume, und die daraus entspringende Größe einer Anschauung überhaupt (Zahl) zu erkennen, das ist ein V e r n u n f t g e s c h ä f t durch Konstruktion der Begriffe, und heißt m a t h e m a t i s c h " [2].

Die allgemeinen Konstruktionen oder Handlungen finden zunächst in der empirischen Anschauung der hingezeichneten Figur oder Strichfolge [3] ihre beispielhafte Veräußerung, doch dies nicht in einer nachträglichen zufälligen Fügung; das Denken einer Größe kann nur durch Synthesis der Teile und periodische Zusammenfügung der Einheit gedacht sein, die anschauliche Handlung der gezeichneten Figur gewinnt aber hierbei Notwendigkeitscharakter: "Wir können uns keine Linie denken, ohne sie in Gedanken zu z i e h e n , keinen Zirkel denken, ohne ihn zu b e s c h r e i b e n , die drei Abmessungen des Raumes gar nicht vorstellen, ohne aus demselben Punkte drei Linien senkrecht aufeinander zu s e t z e n , und selbst die Z e i t nicht, ohne, indem wir im Z i e h e n einer geraden Linie (die äußerlich figürliche Vorstellung der Zeit sein soll) bloß auf die Handlung der Synthesis der Mannigfaltigkeiten, dadurch wir

1) KdrV B 751 f.
2) KdrV B 752
3) Siehe hierzu auch die späteren Analysen zu den Arbeiten P. Lorenzens.

den inneren Sinn sukzessiv bestimmen, und dadurch auf die Sukzession dieser Bestimmung in demselben, achthaben" [1]. D. h. der Doppelcharakter geometrischer Figuren oder arithmetischer Formeln zeigt sich, verkürzt gesprochen, in ihren auf Regel angewiesenen Konstruktionen, die **notwendig der figürlichen Veräußerung** bedarf: Das Verhältnis von synthesis speciosa und synthesis intellectualis enthüllt sich hier in einer Verkettung.

Leisten die transzendentalen Schemata die Verbindung von Begriff und empirischer Anschauung als Bedeutung verleihende Akte, so muß doch etwa beim Zeichnen eines Dreiecks die Geregeltheit dieses Tuns im Begriff des Dreiecks selbst aufgehoben sein: Begriffe sind Regeln der Synthesis in der Anschauung, sie enthalten die Bedingung zu Regeln a priori [2]. Die Differenz zwischen Schema und Begriff scheint hier aufgehoben zu sein, dies meint, "sieht man im Verfahren, wie es beim transzendentalen Schema nach Kant der Fall ist, nicht ein bestimmtes konkretes Vorgehen, sondern die 'Vorstellung einer Methode', den 'inneren Sinn' zu bestimmen, so wird diese Methode eben durch ihre Regel oder ihr Regelsystem gegeben" [3].

Mathematik ist bei Kant über die Leibnizsche Abhebung als scientia imaginationis, gegenüber der Metaphysik als scientia rerum intellectualium, hinausgehend anthropologisch eingeengt: Sie versteht sich als scientia imaginationis **humanae** [4]. "Der Mensch ist als leiblich-sinnliches Wesen an ein Wirken und damit auch an

1) KdrV B 154
2) Siehe KdrV B 171
3) F. Kambartel, Erfahrung und Struktur, Frankfurt a. M. 1968, S. 128
4) O. Becker, a. a. O., S. 737

Verfahren in der sinnlichen Anschauung, an e r s c h e i n e n d e Verfahren gebunden. Der metaphysische Versuch, die Verstandesbegriffe für einen Vorstoß über Erscheinungen hinaus zu benutzen, verkennt diese Grundbedingungen der menschlichen Erkenntnissituation" [1]. Aktual unendliche Zahlbereiche transzendieren den endlichen Handlungscharakter. Universalmathematik nach Leibnizscher Intention spaltet sich in Logik, Mathematik und Metaphysik.

Mathematik ist synthetische Apriorität eigen, da sie sich als Erkenntnis erweiternde Disziplin versteht: Sie basiert auf Begriffen und auf Anschauung, als Form möglicher Erfahrung will sie nicht bloßes Spiel sein. Der Auseinanderfall von Denken und Anschauung heißt aber nichts anderes als die Unmöglichkeit einer Leibnizschen Universalmathematik, das Mißlingen einer Repräsentation der Ideenwelt Gottes im endlichen menschlichen Geist, die ontologische Brücke vom Menschen zu Gott läßt sich auf der Mathematik nicht mehr errichten. "Leibniz i n t e l l e k t u i e r t e die Erscheinungen, so wie Locke die Verstandesbegriffe nach einem System der Noogenie (wenn es mir erlaubt ist, mich dieser Ausdrücke zu bedienen,) insgesamt s e n s i f i z i e r t , d. i. für nichts, als empirische, oder abgesonderte Reflexionsbegriffe ausgegeben hatte. Anstatt im Verstande und der Sinnlichkeit zwei ganz verschiedene Quellen von Vorstellungen zu suchen, die aber nur in V e r k n ü p f u n g e n objektiv gültig von Dingen urteilen könnten, hielt sich ein jeder dieser großen Männer nur an eine von beiden, die sich ihrer Meinung nach unmittelbar auf Dinge an sich selbst bezöge, indessen daß die andere nichts tat als die Vorstellungen der ersteren zu verwirren oder zu ordnen" [2].

1) F. Kambartel, a. a. O., S. 128
2) KdrV B 327

Weiter heißt es bei Kant: Der "Intellektualphilosoph" [1] Leibniz brauchte "indem er den Substanzen der Welt, wie sie der Verstand allein denkt, eine Gemeinschaft beilegte, eine Gottheit zur Vermittlung; denn aus ihrem Dasein allein schien sie ihm mit Recht unbegreiflich" [2]. Leibniz unterliegt der Täuschung der transzendentalen Reflexion. "In Ermanglung einer solchen transzendentalen Topik, und mithin durch die Amphibolie der Reflexionsbegriffe hintergangen, errichtete der berühmte Leibniz ein i n t e l l e k t u e l l e s S y s t e m d e r W e l t , oder glaubte vielmehr der Dinge innere Beschaffenheit zu erkennen, indem er alle Gegenstände nur mit dem Verstande und den abgesonderten formalen Begriffen seines Denkens verglich" [3].

Doch auch in der formalen höchsten Zuspitzung Kantischer Reflexion [4] zeigt sich kein universaler, jede mögliche Erkenntnis überhaupt erreichender Zug: Der menschliche Verstand bleibt anthropologisch befangen, im Gegensatz zu demjenigen Verstand, "durch dessen Selbstbewußtsein zugleich das Mannigfaltige der Anschauung gegeben würde, ein Verstand, durch dessen Vorstellung zugleich die Objekte dieser Vorstellung existieren, würde einen besonderen Aktus der Synthesis des Mannigfaltigen zu der Einheit des Bewußtseins nicht bedürfen, deren der menschliche Verstand, der bloß denkt, nicht anschaut, bedarf" [5].

Die transzendentale Einheit der Apperzeption, "durch

---

1) KdrV B 323
2) KdrV B 293
3) KdrV B 326
4) "Und so ist die synthetische Einheit der Apperzeption der höchste Punkt, an dem man allen Verstandesgebrauch, selbst die ganze Logik, und, nach ihr, die Transzendental-Philosophie heften muß, ja dieses Vermögen ist der Verstand selbst". KdrV B 134
5) KdrV B 138 f.

welche alles in einer Anschauung gegebene Mannigfaltige in einen Begriff vom Objekt vereinigt wird" [1], verliert jede Sinnhaftigkeit, wäre der menschliche Verstand nicht bloß denkender, auf Synthesis des im Mannigfaltigen Gegebenen angewiesener. "Jede Einheit im Objekte, und damit überhaupt die Möglichkeit von Objekten beruht auf der Einheit einer Handlung, und diese wiederum ist die alleinige Weise, in der die menschliche Subjektivität ihrer selbst als 'Einheit des Bewußtseins' ('Ich denke') über eine leere Existenzaussage ('Ich bin') hinaus ansichtig werden kann" [2].

Der Grundsatz der ursprünglichen synthetischen Einheit der Apperzeption gründet, unabhängig von allen Bedingungen der sinnlichen Anschauung, erst Verstandeserkenntnis. Für den Raum meint dies aber, daß er als reine Form des äußeren Sinnes, d. h. als eine solche, die nur das Mannigfaltige der Anschauung a priori zu einer möglichen Erkenntnis gibt, selbst noch erkenntnisfrei bleibt, sowohl als Ganzes als auch Mannigfaltigkeiten in ihm.

Kant führt hierzu an die synthetische Einheit der Apperzeption anknüpfend deutlich aus: "Um aber irgend etwas im Raume zu erkennen, z. B. eine Linie, muß ich sie z i e h e n , und also eine bestimmte Verbindung des gegebenen Mannigfaltigen synthetisch zustande bringen, so, daß die Einheit dieser Handlung zugleich die Einheit des Bewußtseins (im Begriffe einer Linie) ist, und dadurch allererst ein Objekt (ein bestimmter Raum) erkannt wird" [3]. Sukzession findet sich nicht in der Bewegung, als Handlung eines Subjektes, d. h. in der Synthesis des Mannigfaltigen im Raume, nach vollzogener Abstraktion

1) KdrV B 139
2) F. Kambartel, a. a. O., S. 124
3) KdrV B 137 f.

von diesem, also in reiner Aufmerksamkeit der ihr zugrunde liegenden Handlung - was nichts anderes meint als die Bestimmung des inneren Sinnes gemäß seiner Form - sondern der Verstand erzeugt sie erst selbst in Affektion auf ihn. Bewegung meint hier natürlich nicht die Ortsverrückung eines physikalischen Objektes und damit eine Überschreitung der von der Geometrie als reine Wissenschaft gesteckten Grenze; ihr Charakter der sukzessiven Synthesis des Mannigfaltigen in der äußeren Anschauung weist sie als Raumbeschreibung - nach Kant - dem gemeinsamen Gebiet von Geometrie und Transzendentalphilosophie zugehörig aus [1]. Hiermit stellt sich aber zugleich die Frage, worin die Unterschiedenheit von denkendem Ich und angeschautem Ich gründet; anders gewendet, ist das ihnen Identische problematisch geworden. " I c h , als Intelligenz und d e n k e n d Subjekt, erkenne m i c h selbst als g e d a c h t e s Objekt, sofern ich mir noch über das in der Anschauung gegeben bin, nur, gleich anderen Phänomen, nicht wie ich vor dem Verstande bin, sondern wie ich mir erscheine, hat nicht mehr auch nicht weniger Schwierigkeit bei sich, als wie ich mir selbst überhaupt ein Objekt und zwar der Anschauung und innerer Wahrnehmungen sein könne" [2]. Ein näheres Eingehen hierauf würde den Rahmen der Arbeit sprengen.

Kant schreibt: "... daß wir die Zeit, die doch gar kein Gegenstand äußerer Anschauung ist, uns nicht anders vorstellig machen können, als unter dem Bilde einer Linie, sofern wir sie ziehen, ohne welche Darstellungsart wir die Einheit ihrer Abmessung gar nicht erkennen könnten, im gleichen daß wir die Bestimmung der Zeitlänge, oder auch der Zeitstellen für alle inneren Wahrnehmungen, im-

1) Siehe hierzu auch KdrV B 155 Anmerkung
2) KdrV B 155 f.

mer von dem hernehmen müssen, was uns äußere Dinge Veränderliches darstellen, folglich die Bestimmungen des inneren Sinnes gerade auf dieselbe Art als Erscheinungen in der Zeit ordnen müssen, wie wir die äußeren Sinne im Raume ordnen, ..." [1].

Wenn also auch nach Kant die mathematische Konstruktion der Erfahrung vorausgeht, so sind wir doch im Erkennen nicht losgelöst von der Empirie. Indem wir nach der Bedingung der Möglichkeit der Erkenntnis fragen, zeigt sich der Verweis auf die Bestimmungen im Raume. "Wir sind in den Raum verwiesen, indem dieser in solchem Verweis schon vorausgesetzt ist" [2]. Läßt man von dem Erfahrungsbegriff eines Körpers die empirischen Eigenschaften weg, so bleibt doch ein nicht wegzulassender Rest: der Raum. "Das Verfahren ist also: im Weglassen das Nichtweglaßbare dieses Weglassens hervorkommen zu lassen" [3].

Die beiden Stämme der menschlichen Erkenntnis sind nach Kant sinnliche Anschauung und Verstand, d. h., die Sinnlichkeit empfängt Gegenstände rezeptiv, der mit Spontaneität versehene Verstand denkt sie in der bekannten Form der gegenseitigen Verkettungen. Mathematische Erkenntnis fußt auf den reinen Formen der Sinnlichkeit, speziell die Arithmetik in der vorher angegebenen Weise auf dem Schema der Zeitreihe. "Den vorintuitionistischen Mathematikern mußte diese Kantische Lehre unverständlich und wenig beachtenswert erscheinen; seitdem aber Brouwers Intuitionismus, Skolems rekursive Zahlentheorie und verwandte Gedanken hervortraten, hat sich die Lage geän-

1) KdrV B 156
2) L. Eley, Metakritik der Formalen Logik, Den Haag 1969, S. 353
3) L. Eley, a. a. O., S. 353 f.

dert. Auch Hilbert beruft sich ja in seinen metamathematischen Betrachtungen auf Kant" [1].

Lorenzens Programm kann ebenfalls als Fortsetzung Kantischer Bemühungen gedeutet werden [2].

1) O. Becker, Größe und Grenze der mathematischen Denkweise, München 1959, S. 154
2) Siehe hierzu die entsprechenden späteren Abschnitte dieser Arbeit.

§ 2. Die Bemühungen der Griechen um eine Grundlegung der Mathematik

a) Die Geometrie als axiomatische Methode

Bei Aristoteles findet man wohl zuerst die differenzierte Ausformung von Potentiell-Unendlichem und Aktual-Unendlichem. Doch während er den ersten Begriff für die Mathematik als konstitutiv ansieht, will er den letzten ganz aus ihr verbannen. Die Aktual-Unendlichkeit wird dann von G. Bruno Jahrhunderte später wieder aufgegriffen und als kennzeichnende Eigenschaft der Welt angesehen. Sie hält sich als zutreffend in der Formulierung der klassischen Physik durch und erfährt erst in den neueren finiten Weltmodellen eine entschiedene Ablehnung. Unter diesem Blickwinkel erscheint es zumindest überraschend [1], daß erst mit dem ausgehenden 19. Jahrhundert durch Cantor dieser Begriff im Zusammenhang mit seiner Formulierung der Mengenlehre wieder Einzug in die Mathematik hält.

Es soll nun anschließend aufgezeigt werden, unter welchen Bedingungen es in der Antike zu der bemerkten Unterscheidung kam, um aus der Kenntnis dieser Quellen, die hier nicht primär als historische anzusehen sind, sondern die Reflexion der Mathematik betreffend und damit didaktisch relevant werdend, Nutzen für das Verständnis der modernen Mathematik zu ziehen. Daß damit auch den geschichtlichen Untersuchungen didaktische Nutzbarmachung zukommt, sei hiermit eigens erwähnt: Mit der Einsicht in die griechischen Wurzeln der Mathematik geht

1) Man ist hier wohl nicht gezwungen, in aller Schärfe von einem "Anachronismus" zu sprechen, wie Lorenzen es in seinem Aufsatz "Das Aktual-Unendliche in der Mathematik" in: Lorenzen, Methodisches Denken, Frankfurt 1968 ausdrückt.

einher - selbstverständlich unter Berücksichtigung der zu treffenden Modifizierungen - ein genaues Kennenlernen der heutigen Mathematik.

Griechische Mathematik ist gleichzusetzen mit Geometrie. Selbst die Algebra und die Arithmetik findet man nur in geometrischen Formulierungen vor [1]. In der euklidischen Geometrie werden jene Beziehungen behandelt, die zwischen idealen räumlichen Grundgebilden bestehen; sie geht dabei aus von der Konstruktion ihrer Grundbegriffe. Ihre Grundsätze (Axiome) sind wahr auf Grund ihrer Evidenz. Die Geometrie, wie sie von den Griechen aufgebaut wurde, gilt als Vorbild für die deduktiven Wissenschaften, weil sie ihre geometrischen Begriffe mit Hilfe weniger Grundbegriffe definiert und sich alle Sätze ergeben als logische Folge der Axiome, die als Versuche anzusehen sind, die Raumstruktur in wenigen Sätzen zu kennzeichnen.

Wenn man die Geometrie definiert als Wissenschaft, die die Struktur des Raumes, also jene "Beziehungen der räumlichen Gebilde und ihrer gesetzmäßigen Abhängigkeiten" [2] zu ihrem Gegenstand hat, so kommt den Griechen das Verdienst zu, erkannt zu haben, daß sie eine völlig rationale ist und unterschieden werden muß von den nur deskriptiv zugänglichen Beschreibungen wirklicher Einzeldinge. Indem nun jener Aufbau der Geometrie zum Vorbild für die gesamte Mathematik wurde, versteht sich ihr großes Methodeninteresse gerichtet einmal auf die Verfahren der Definition und der Konstitution ihrer Gegenstände, zum anderen auf den Charakter der Folgerung aus schon gesetzten oder sich ergebenden Urteilen. "Die axiomatische Methode besteht einfach darin, die Grundbegriffe

1) Siehe hierzu auch H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, und O. Becker, Mathematische Existenz.
2) H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1928, S. 3

und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln" [1]. Husserl spricht dann von einem "definiten Sachgebiet" - falls dies möglich ist. Anders formuliert: Die Axiome sind genau jene Sätze, aus denen sich die "einschlägigen generellen wahren Urteile" folgern lassen. "Hierauf beruht mithin diese ganze Kunst zu überzeugen. Sie ist in zwei Grundsätzen enthalten: alle Beziehungen, die man verwendet, zu definieren; und alles zu beweisen, indem man im Geist die definierten Ausdrücke durch die Definitionen ersetzt" [2].

In Euklids "Elementen" ist diese Forderung noch nicht voll gelöst: Seine Definitionen sind Deskriptionen, die auf das nur in der Anschauung zu gebende verweisen. Damit gibt er die einzig mögliche Art der Erfassung von "Punkt", "zwischen" usw. an, doch übersieht er, daß für den deduktiven Aufbau der Geometrie jene Deskriptionen überflüssig sind (Hilbert). Die allgemeinen Größenaxiome werden insofern problematisch, da sie, wie selbstverständlich, für einige geometrische Begriffe etwa Flächeninhalt, Streckenlänge usw. zur Anwendung kommen, und damit den Horizont möglicher verborgener Axiome vergessen. Dies umso leichter, da die mit den Grundbegriffen und ihren Konstruktionen verbundene unmittelbare Anschauung diese Tendenz nur noch verstärkt, wozu dann noch freilich die Unnatürlichkeit einer reinen logisch-deduktiven Haltung beiträgt. Jenes Ziel ist - nach der Aufdeckung der verschleierten Axiome der Anordnung durch Pasch (1880) - in Hilberts "Grundlagen der Geometrie" durch die Aufstellung seiner bekannten fünf Axiomengruppen erreicht.

---

1) H. Weyl, a. a. O., S. 16
2) K. Bornhausen, Pascal, Esprit géométrique, Basel 1920

Das Sachgebiet der Geometrie, eben die zu untersuchenden Strukturen des Raumes, legen nicht in eindeutiger Weise die Wahl ihrer Grundbegriffe und Relationen fest. "Die Frage, ob sich hier ein wesenhaft Originäres einem wesenhaft Abgeleiteten gegenüberstellen läßt, liegt außerhalb der Kompetenz des Mathematikers" [1]. Aber selbst diese wenigen Ausführungen zeigen schon die Verschlingungen von Mathematik, Philosophie und Naturwissenschaft innerhalb des Problems des Raumes.

Zu philosophischen Untersuchungen und mannigfachen Spekulationen führte die Jahrhunderte lang angenommene These, bei den Axiomen des Euklid handele es sich um unbeweisbare Grundsätze, sie seien als "Tatsachen" hinzunehmen. Damit wurde aber sofort die Frage von Wichtigkeit, worin dieses System seine Einzigkeit und Ausgezeichnetheit besitze. Die Mathematik wurde hierdurch angeregt, neue Beweismethoden und Systeme zu entwickeln, die nach Jahrhunderte langem Ringen schließlich den Relativitätscharakter des Axiomensystems des Euklid enthüllten und allgemein zur Differenzierung von unbeweisbar und als unbewiesen gesetzten Grundvoraussetzungen führten: Die Entwicklung der Mathematik ging Hand in Hand mit der Entschärfung von unbeweisbar zu unbewiesen. Genauer meint dies, daß von unbeweisbar nur innerhalb eines vorliegenden Systems gesprochen werden kann, die Grundvoraussetzungen besitzen aber nur den konventionellen Charakter von unbewiesenen Basissätzen.

Doch gilt es nun noch näher, wie angekündigt, auf den besonderen Existenzsinn in der Mathematik der Griechen einzugehen.

---

1) H. Weyl, a. a. O., S. 17

b) Konstruierbarkeit als Postulat der antiken Geometrie

Die antike Geometrie wird durchherrscht von dem Postulat der Konstruierbarkeit. Das alleinige Mittel der Sicherung der Existenz mathematischer Gegenstände, d. h. genauer für die griechische Mathematik die Existenz von Figuren, besteht in ihrer K o n s t r u i e r b a r k e i t . Sie ist gesichert in den Grundkonstruktionen, die in zwei Postulaten des Euklid ausgesprochen sind:

"Gefordert soll sein:
1. daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann, ...
3. daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann, ..." [1].

Die Existenz einer geraden Linie und des Schnittpunktes zweier nicht paralleler Geraden (Parallelenpostulat) sichern zwei weitere Postulate:

"Gefordert soll sein:
2. daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann, ...
5. (Ax. 11) und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind" [2].

Zu den Postulaten findet sich bei Zeuthen die folgende Bemerkung: "In Übereinstimmung damit, daß die Probleme

1) Übersetzung nach O. Becker, Grundlagen der Mathematik, S. 90
2) O. Becker, a. a. O., S. 90

der Alten im wesentlichen Sätze über die Existenz, und ihre Lösungen Beweise für die Existenz des Behandelten oder Gesuchten sind, sind die Postulate behauptungen über dessen Existenz, deren Anerkennung ohne Beweis oder Nachweis verlangt wird" [1]. An dieser Stelle soll nicht genauer auf die unterschiedliche Auffassung des näheren Charakters der zu verwendenden Konstruktionen eingegangen werden. Verbindlich, über den angedeuteten Streit hinausragend, galt jedoch die Forderung, mathematische Gegenstände allein durch Konstruktion zu definieren und ihre Existenz zu verbürgen. Dabei ist der Begriff der Konstruktion noch ganz an die Mittel der Herstellung gekoppelt: Zirkel und Lineal sind nach wohlbestimmten Anleitungen zu verwenden. Gerade in der genauen Angabe der Vorschriften besteht unter anderem der Fortschritt der geometrischen Methode durch Euklid.

c) Die Axiome des Euklid als Leitsätze für die Konstruktion der Geometrie

Aus dem aufgezeigten Ansatz läßt sich hier erneut die Frage stellen, warum in den "Elementen" des Euklid genau diese Grundsätze und keine anderen an die Spitze seines Systems gestellt sind. Die allgemein übliche Antwort lautet wohl so, daß eben ihnen eine besondere Evidenz und eine wunderbare Übereinstimmung mit unserer Anschauung zukommt. Abgesehen von der unbefriedigenden Vagheit der verwendeten Begriffe, denen eine treffende Transformierung der sinnlichen Phänomene in geometrische Begriffsbildungen mangelt, kommt noch hinzu, daß zweifellos manche der abgeleiteten Sätze "anschaulicher" sind als die verwendeten Axiome. In Verbindung mit dem k o n s t r u k t i v e n Charakter der griechischen

1) Zeuthen, a. a. O., S. 120

Mathematik erscheint deshalb eine andere Interpretation die gemäßere, die frei ist von philosophischen Spekulationen und psychologischen Auslegungen: Die verwendeten Axiome (hier soll nicht auf den Unterschied von Postulaten und Axiomen eingegangen werden) stehen primär an der Spitze des euklidischen Systems der "Elemente", da sie in ausgezeichneter Weise einen konstruktiven Aufbau der Geometrie zu leisten vermögen.

Die Auswahl der Axiome des Euklid geschieht lediglich unter dem Leitfaden des Leistungscharakters: Sie gestatten einen konstruktiven Aufbau der Theorie im obigen Sinne.

d) Das Auftreten der Spannung Axiomatizismus - Konstruktivismus

Eingeschoben sei hier eine Bemerkung O. Beckers: "Der Streit um die Benennung der mathematischen Sätze, - ob man sie als Theoreme oder Probleme bezeichnen solle - rührt letzten Endes her von dieser verschiedenen Stellung zur Frage der Zeitlichkeit, der G e n e s i s der mathematischen Gebilde. Ob die Gebilde vom Denken (Geist, διάνοια) g e s c h a f f e n werden oder nur g e f u n d e n werden, das ist die Streitfrage. Ob sie an sich von Ewigkeit her 'da sind' (man denke an Platos ἀνάμνησις -Lehre bezüglich des Mathematischen im 'Meno'!) oder von der διάνοια 'zuwege gebracht' werden (ποιεῖσθαι), das ist die Alternative" [1].

Man wird also in dem Unternehmen, mathematisches Denken zu enthüllen, - unter dem Gesichtspunkt der in ihr typischen Handlungen - auf die noch heute aktuelle Frage-

1) O. Becker, Mathematische Existenz, S. 572

stellung geführt, ob die axiomatische Haltung des transzendent mathematisch Seienden (die Haltung Cantors und unter Modifizierungen auch Hilberts) oder die auf konkret ausgeführten Konstruktionen basierende Einstellung (Brouwer, Heyting, mit Modifizierungen Weyl, Dingler, Lorenzen) die angemessenere ist. Angesprochen wird also hiermit der "Kampf" zwischen Formalisten und Intuitionisten oder allgemeiner, wie Lorenzen [1] es formuliert, zwischen Axiomatizisten und Konstruktivisten.

e) Axiomatizismus - Konstruktivismus in ihrer Bedeutung für die Praxis

"Es ist jedoch heute leicht zu sehen, warum der Kampf nicht theoretisch entschieden werden konnte: Zwischen konstruktiver und axiomatischer Mengenlehre besteht gar kein Widerspruch. Man kann ja beides tun" [2]. Der Streit ist jedoch unvermeidlich, wenn eine Partei einen Totalitätsanspruch vertritt. Lorenzen sieht also in den angeführten Parteien keinen Ausdruck einer Grundlagenkrise der Mathematik, damit ist aber noch nicht ausgeschlossen, daß auf einem anderen Felde als dem eigentlich mathematischen Forschungsbereich eine Entscheidung zugunsten einer der beiden Richtungen fallen kann. Dies wird auch von Lorenzen an einer anderen Stelle angedeutet. "Es ist eine sicherlich wichtige Frage, ob man z. B. in gewissen Lehrplänen nur konstruktive Mathematik - oder nur axiomatische Mathematik - zulassen sollte. Aber das ist eine praktische Frage. Die Meinungsverschiedenheiten hierüber stellen keine 'Grundlagenkrise' der Mathematik dar" [3]. Damit liegt nicht zuletzt eine Zuweisung in die Didaktik der Mathematik vor.

---

1) Siehe etwa die Einleitung zu: P. Lorenzen, Metamathematik, Mannheim 1962
2) P. Lorenzen, a. a. O., S. 10
3) P. Lorenzen, a. a. O., S. 10

Dazu erweist es sich als notwendig, zu untersuchen, in welcher Weise der in Euklids "Elementen" schon zugrunde gelegte Aspekt der Handlung im mathematischen (geometrischen) Wissenschaftsbegriff heutiger Prägung eine Wandlung erfährt, um ihn nach erfolgter Durchleuchtung für eine Didaktik fruchtbar zu machen; denn der Mathematiker als Mathematiker vergißt sich in seinen Handlungen, ja nur so kann er überhaupt Mathematiker sein. Doch diese Vergessenheit will gelernt sein.

f) Die Wandlungen des antiken geometrischen Handlungsbegriffs in der modernen Mathematik

Erst mit Aufstellung der nicht-euklidischen Geometrien setzt sich das schon bei Euklid zu findende Kriterium der Leistungsfähigkeit als Handlungsbasis für die Auswahl von Axiomen in voller Allgemeinheit durch: Die Frage nach der Evidenz und Anschaulichkeit der Axiome, was auch immer damit gemeint sei, stellt sich wegen der ihr zugewiesenen Bedeutungslosigkeit nicht mehr.

Der bei Euklid auf konkrete Konstruktionen mit Zirkel und Lineal fixierte Handlungsbegriff der - so läßt sich jetzt sagen - elementaren Geometrie erfährt eine Ausweitung auf gedankliche Operationen, die in den zugrunde gelegten Axiomen und Definitionen ihre Verankerung finden. Waren in den "Elementen" des Euklid geometrische Gegenstände bildliche Figuren, deren Existenz im Aufbau durch wenige elementare Figuren gesichert wurden, so tritt an deren Stelle in den modernen Geometrien die Zeichensymbolik. Das Auftreten der Zeichen erweist sich als zwangsläufig, wenn nicht nur Zirkel und Lineal Arbeitsmittel der Geometrie sein sollen. Es läßt sich damit also die Wechselwirkung zwischen verwendeten Zeichen und rein gedankli-

chen, konstruktiven Handlungen aufhellen: Je mehr die Zeichensymbolik Verwendung findet, desto stärker schiebt sich die alleinige gedankliche Konstruktion in den Vordergrund. "Das überragend Neue, in dem die signitive Symbolik die bildlich-anschauliche weit hinter sich läßt, ist unter anderem darin gelegen, daß sie in ihren Zeichen nicht nur Bildliches und Bildfähiges fixieren kann, sondern auch rein Kategoriales, wie etwa logische Operatoren. Damit wird es möglich, signitiv nicht nur geometrische Gebilde zu repräsentieren, sondern vollständige Aussagen 'über' diese Gebilde" [1]. Dies meint aber doch nichts anderes, als daß nur eine Isomorphie zwischen den Systemen der Zeichen und Aussagen vorliegt: Eine Theorie der Struktur des mathematischen Denkens, eine Theorie der mathematischen Beweisführung ist nun möglich geworden. Sie bindet sich aber nicht rein zufällig an die Zeichen. Mathematisches Operieren ist notwendig mit den Zeichen, den Residuen bildlicher Figuren, verknüpft [2]. Mathematische Handlungen haben als Bedingungen ihrer Möglichkeit die Herstellbarkeit von Zeichen zur Voraussetzung. Wenn aber diese Herstellungsregeln damit auch eine Überschreitung der "handwerklichen" Konstruktionsmittel auf rein gedankliche Konstruktivismen mit sich ziehen, so ist hiermit die Endlichkeit der auszuführenden Handlungen nicht mehr ausdrücklich selbstverständlich. Vielmehr muß die Finitheit der Operationen zur Vermeidung möglicher Paradoxien gesondert gefordert werden.

---

1) E. Ströker, Philosophische Untersuchungen zum Raum, Frankfurt 1965, S. 251

2) Die These Strökers, in den geometrischen Vollzügen sei die Leiblichkeit wesentlich konstitutiv, soll in dieser Arbeit nicht weiter untersucht werden. Auf ihre Bedeutung für die Didaktik wird an anderer Stelle einzugehen sein.

Eine D i d a k t i k d e r G e o m e t r i e und eine solche der M a t h e m a t i k allgemein muß, das hat sich aus der angeführten Reflexion auf die spezifischen geometrischen Handlungen in ihrer historischen Wandlung ergeben, diese k o n s t r u k t i v e Struktur des Mathematischen hervorheben. Als ein didaktisch zu berücksichtigender Punkt sollte der historische Charakter moderner mathematischer Theorien Verwendung finden. Sie sind anzusehen als in der Geschichte gewordene Disziplinen. Im Blick auf ihre genetisch-geschichtliche Eigentümlichkeit lassen sich ausgezeichnete Motive für ihre heutige Ausformung ans Licht heben, die Besonderheit ihrer Leistungen - durch historisch frühere Theorien motiviert - erst verstehen und damit auch didaktisch nutzbar machen.

g) Die Genesis der Zahlbildung

Für eine mögliche Didaktik der Mathematik, die stets die eigentümlichen mathematischen Handlungen hervorzubringen hat, soll jetzt noch die Genesis der Zahlbildung in ihrer Verbindung zum "Unendlichen" Behandlung finden [1].

Zu Beginn sei eine Bemerkung Levy-Brühls angeführt: "Jede Zahl hat so ihre eigene individuelle Physiognomie, eine Art mystische Atmosphäre, ein 'Kraftfeld', das sie besonders auszeichnet. Jede Zahl wird so speziell für sich selbst und ohne Vergleich mit den anderen vorgestellt - man könnte auch sagen gefühlt. Von diesem Gesichtspunkt aus bilden die Zahlen nicht eine homogene Reihe und sind infolgedessen für die einfachsten logi-

1) Man vergleiche hierzu die ausführlichen Untersuchungen von J. Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig / Berlin 1924; O. Becker, Mathematische Existenz

schen oder mathematischen Operationen ganz ungeeignet. Die mystische Individualität einer jeden von ihnen bewirkt, daß sie sich weder addieren noch subtrahieren noch multiplizieren noch dividieren lassen" [1]. Diese Untersuchungen über die Zahlvorstellungen in frühmenschlichen Epochen ordnen diejenigen des aristotelischen - platonischen Zahlbestimmungsstreites in einen weiten geschichtlichen Zusammenhang.

Man sollte nach den vorher geleisteten Ausführungen meinen, in den Anfängen der heutigen Mathematik bei den Griechen hätten die Zahlen keinen eigenen, sie von geometrischen Figuren abhebenden Bedeutungshorizont besessen. Dies trifft in dieser vollen Schärfe zumindest für die Philosophen der Mathematik nicht zu [2]. An dieser Stelle soll nur auf die Entwicklung der Zahl von ihrer gestalthaften Auffassung hin zu einer Ansicht, in der die Stellung der Zahl innerhalb einer Reihung primär vorherrscht, angedeutet sein. Damit ist aber gemeint das Übergehen der platonischen [3] in die aristotelische Auffassung. Man muß wohl C. Becker zustimmen, wenn er hierin den entscheidenden Kontrast zwischen ἀριθμοὶ ἀσύμβλητοι (Gestalt - Zahlen) und σύμβλητοι (Reihen - Zahlen) sieht [4].

In diesen Zusammenhang fügt sich auch ein Zitat aus Stenzels angeführtem Werk ein: "Mit unermüdlicher Hartnäckigkeit verteidigt Aristoteles die uns natürliche Auffassung der Zahlen als gleicher, in den arithmetischen Operationen grundsätzlich gleichartiger und vereinbarer (σύμβλητοι) Einheiten gegen einen ganz anderen Zahlbe-

1) Levy-Brühl, Das Denken der Naturvölker, Leipzig / Wien 1921, S. 179
2) Siehe O. Becker, Mathematische Existenz, S. 640
3) Siehe hierzu auch A. Wedberg, Plato's philosophy of mathematics, Stockholm 1955
4) O. Becker, Mathematische Existenz, S. 640

griff, der gerade durch die Unvereinbarkeit der Zahlen im Sinne irgendwelcher rechnerischen Verwendung ausgezeichnet sein muß: wenn die Vierheit die Idee von etwas ist, z. B. des Pferdes oder des Weißen, so ist der Mensch 'ein Teil des Pferdes, wenn die Zweiheit der Mensch ist'" [1]. Arithmetisches Operieren mit Zahlen kündigt sich also hier im Weiterschreiten von der "Unvereinbarkeit" zur "Vereinbarkeit" an.

Die Motivierung für einen Fortschritt von einer Gestaltzahl zur Stellenzahl innerhalb einer "Folge" muß in den Quellen der Mathematik bei Aristoteles in der Erfassung des Endlosen durch die Zahl gesehen werden kann. Für ihn ist eine endlose Gestalt ein Widersinn [2], nur die Folge kann sich ins Unbegrenzte fort erstrecken. Damit kommt aber, trotz aller widersprechenden Ansichten, entscheidend die Zeitlichkeit der Mathematik ins Spiel.

Aristoteles' Ausführungen des Unbegrenzten (ἄπειρον) lassen sich dahingehend zusammenfassen, daß nach ihm dem Endlosen das W e r d e n wesentlich ist: Es steht niemals als Ganzes präsent zur Verfügung. Fragt man nach den entscheidenden Phänomenen, in denen sich eben jene Charakteristik des Endlosen findet, so sind mit Aristoteles die Zahl und die Zeit in ihrer hervorstechenden Beispielhaftigkeit zu nennen.

Eine scharfe Bestimmung des Potentiell-Unendlichen findet sich auch schon bei Zenon von Elea, und zwar in der Gedoppeltheit des "immer" und der "Wiederkehr des Gleichen", der immer währenden Wiederholung.

Die antiken Denker führen damit der Zahl - als Zahl in-

1) J. Stenzel, a. a. O., S. 7
2) O. Becker, Mathematische Existenz, S. 641

nerhalb einer Folge - vermittelt durch das Endlose (ἄπειρον) den Charakter der Zeitlichkeit zu.

Diese Einsicht wird uns später bei der didaktischen Verwendung des konstruktiven Aufbaus der Mathematik nach Lorenzen wiederum entgegentreten. Zusammen mit den schon explizierten Reflexionen Kants über die Mathematik sind damit entscheidende Gründe zur Stützung eines solchen Vorgehens vermittelt.

Aristoteles sagt: "Überhaupt existiert das Unendliche nur in dem Sinne, daß immer ein Anderes und wiederum ein Anderes genommen wird, das eben Genommene aber wiederum ein Endliches, jedoch immer ein Verschiedenes und wieder ein Verschiedenes ist. ... so daß also das Unbegrenzte der Potenz nach wohl ist, dem Aktus nach aber nie erreicht wird, ..." [1]. Mit O. Becker lassen sich, unbeschadet durch seine anders gearteten Intentionen [2], von Aristoteles her erste Aufklärung über den Zusammenhang von Zeit und Zahl, aktual-unendliche und potentiell-unendliche Menge erzielen und damit einen Beitrag für ein (didaktisches) Verständnis einer operativen Mathematik im Sinne Lorenzens erbringen: H a n d e l n , O p e r i e r e n setzt wesentlich voraus die Bewegt-

1) Aristoteles, 3. Buch der Physik

2) "Der Ausdruck 'Mathematische Existenz' entstammt der mathematischen Fachsprache und diese Arbeit geht auch von diesem Wortgebrauch innerhalb der positiven Wissenschaft aus. Aber ihre Absicht ist nichtsdestoweniger eine philosophische; sie ist nämlich auf die Ergründung des Seinssinns der mathematischen Phänomene gerichtet."
O. Becker, Mathematische Existenz, S. 441
Becker stützt sich in seinen Untersuchungen wesentlich auf die Husserlsche Methode der transzendental-konstitutiven Phanomenologie ("Logische Untersuchungen", "Ideen") und zum anderen auf die von Heidegger eingeführte Arbeitsweise der hermeneutischen Phanomenologie. Heideggers "Hermeneutik der Faktizität" verwendet Becker in seinen Untersuchungen zur Aufhellung der mathematischen Existenz.

heit des "Weiterschreitenkönnens", die Fähigkeit des "Immerwieder", des "Eins und Eins und Eins usw.".

Aristoteles "definiert" nun aber die Zeit: "Denn dies ist die Zeit: die 'Zahl' der Bewegung gemäß dem Früher und Später!" [1]. Der Erzeugungsprozeß der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen gründet also nach Aristoteles in einem ständigen Werden, in der Bewegtheit. Zahlen, deren Sein in einem Werden hervorkommt, sind nicht primär als Anzahlen (Kardinal-Zahlen), sondern als Stellenzeichen (Ordinal-Zahlen) zu fassen. Nun geht man aber im Zählen genau um eine Einheit weiter. Da also das "Weiterschreiten" mit genau der gleichen "Schrittlänge" erfolgt, ist es möglich, die Länge einer solchen "Schrittfolge", "Strichfolge", "Einheitshandlungsfolge" zu messen, d. h., das "Wieoft" stimmt mit dem "Wieviel" überein.

Hier seien nochmals kurz die aristotelische und kantische Auffassung des Potentiell-Unendlichen angeführt, da hieran die operative Ansicht des Unendlichkeitsbegriffs Lorenzens anknüpft. Aristoteles spricht in seinem 11. Buch der Metaphysik von dem Begriff des Unendlichen, der "entweder in Beziehung auf das Hinzufügen oder in Beziehung auf das Hinwegnehmen oder in beiden Beziehungen unendlich sein kann ...". Für diesen Begriff des Potentiell-Unendlichen trifft aber die Möglichkeit der Realisierung in Raum und Zeit zu. Die Arithmetik stellt aber nach Kant eine charakteristische Konstruktion des Potentiell-Unendlichen dar. Durch eine wiederholte Handlung werden bestimmte wohl zu unterscheidende Figuren, die Ziffern, im Anschauungsraum erzeugt. Sie lassen aber ihrerseits auf Grund des spezifischen Konstruktionsprinzips (Eins und Eins und Eins und ...) die Messung von Wiederholungsvorgängen zu, und drücken als vermittelnde damit Konstruktionsvorschriften für Wiederholungsvorschriften aus.

---

1) Aristoteles, Physik IV

Teil II

Der Aufbau der Logik durch Lorenzen

§ 3. Die operative Logik Lorenzens

a) Vorbereitende Bemerkungen zur operativen Logik Lorenzens

Logik versteht sich als die Theorie, die sich genau mit denjenigen Beziehungen zwischen Aussagen befaßt, welche vom Inhalt der zu untersuchenden Aussagen unabhängig bestehen. Logik tritt an zentraler Stelle im Verlauf der abendländischen Geistesgeschichte auf. Unter jenem Terminus werden die verschiedenartigsten Bedeutungen gefaßt: die aristotelische Syllogistik, scholastische Disputationskunst, die transzendentale Logik der Kantischen Vernunftkritik, die dialektische Logik Hegels und die mathematische Logik der "Principia Mathematica" von Whitehead und Russell. "Der Terminus 'formale Logik' wurde nach Kant üblich (vgl. Scholz, Abriß der Geschichte der Logik, 1931), um die formal-logischen Schlüsse eben als formale von den übrigen allgemeinen Vernunftwahrheiten zu unterscheiden" [1].

Im 20. Jahrhundert wandelte sich die Logik aus einem vormaligen Grundbestand der Philosophie zu einer eigenständigen Wissenschaft. Hiermit war eine neue Namensgebung verbunden, die eben diese Verselbständigung auch nach außen hin dokumentieren sollte: Bezeichnungen wie "formale Logik", "neue Logik", "moderne Logik", "Logistik", "mathematische Logik" und andere entstanden. Der

1) P. Lorenzen, Formale Logik, Berlin 1967, S. 4

Name "formale Logik" wird im folgenden durchgehalten. Im weiteren Sinne kann man mit I. M. Bochenski und A. Menne unter formaler Logik "die Lehre vom Logikkalkül, seinen Voraussetzungen und Anwendungen" [1] verstehen.

Nach Aristoteles gilt die Logik als typisches Beispiel einer Wissenschaft, die, obwohl sie von der Erfahrung unabhängig ist, doch auf sie anwendbar ist. Dabei stellt sich für ihn noch nicht die Frage des Warum dieser Ausgezeichnetheit; er gibt vielmehr in seiner Syllogistik eine zusammenfassende und systematische Darstellung der auftretenden Schlußformen. In dem schon hinreichend oft zitierten Schulbeispiel eines formalen logischen Schlusses:

"Einige Menschen sind Mathematiker"
"Alle Mathematiker sind weise"

also "Einige Menschen sind weise", kommt es nicht auf den Inhalt der Aussagen an. Die Form einer Aussage zeigt sich eben dadurch, daß die auftretenden Prädikate durch beliebige andere ersetzt werden können, ohne sie zu verändern. Man realisiert die Form einer Aussage, indem Variable an die Stelle vorkommender Prädikate treten. "Variable sind bedeutungsleere Zeichen, die nur dazu dienen, die Stellen anzuzeigen, an denen die bedeutungsvollen Konstanten, hier die Prädikate, einzusetzen sind" [2]. Das angegebene Beispiel, mit P, Q, R als Variable, besteht dann in den Aussageformen

"Einige P sind Q"
"Alle Q sind R"

also "Einige P sind R".

Man kann nun mit Lorenzen als das Grundproblem der for-

1) I. M. Bochenski, Grundriß der Logistik, Paderborn 1962, S. 13
2) P. Lorenzen, a. a. O., S. 4 f.

malen Logik ansehen, wann und mit welchen Begründungen von Aussageformen, die aus Variablen und logischen Partikeln - wie "alle", "einige", "und", "wenn - dann" usw. - zusammengesetzt sind, auf andere so gebildete Aussageformen geschlossen werden darf, oder wie man auch sagt, wann und unter welchen Bedingungen die Aussageform A die Aussageform B impliziert. "Mit diesen Termini kann die formale Logik als die Wissenschaft von den Implikationen der Aussageformen definiert werden" [1].

Für die meisten Interpretationen der formalen Logik trifft diese Definition sicherlich zu, d. h., in ihr kommt nicht die Besonderheit der Lorenzenschen Begründung der Logik hervor, die ihr nicht zuletzt für eine mögliche didaktische Verwendung eine ausgezeichnete Funktion einräumt und die modifiziert hieraufhin darzustellen ist. Nur soviel sei hier schon bemerkt: Lorenzen verankert die formale Logik in schematischen Operationen, die protologisch einzuüben sind [2].

Die Aussagenlogik entwickelt sich in den stoisch-megarischen Schulen und später in der Scholastik. Aber erst in Freges "Begriffsschrift" (1879) ist eine Vereinigung von aristotelischer Syllogistik und Aussagenlogik zu finden: In der elementaren Prädikatenlogik liegt eine zusammenfassende Theorie aller logischen Partikel vor. Gefördert wurde diese Fortentwicklung durch die Verwendung von formalen Methoden, die in starker Anlehnung an mathematische Arbeitsweisen sich ausbildeten.

---

1) P. Lorenzen, a. a. O., S. 5

2) L. Eley zeigt in seiner "Metakritik der formalen Logik", daß dies nur vermöge einer natürlichen Welteinstellung, in der sich diese Handlungen halten, möglich ist. "Sinnliche Gewißheit" ist nach Eley die Voraussetzung einer jeglichen schematischen Operation. In jener gründet Aussagenlogik und elementare Prädikatenlogik. Die Aufgabe der Eleyschen Arbeit ist die transzendental-phänomenologische Konstitution der Aussagen- und Prädikatenlogik.

Wenn auch etwa die axiomatische Methode sicherlich zur Aufhellung logischer Strukturen beiträgt, so sollte man in ihr doch nicht einen Mangel übersehen, der in einer möglichen Verwendung im Unterricht offensichtlich wird: Durch die Aufstellung bestimmter logischer Axiome wird die apriorische Gültigkeit logischer Gesetze allzuleicht in den Hintergrund gedrängt. Wenn man bedenkt, daß selbst innerhalb der Wissenschaftstheorie zeitweilig die Ansicht vertreten wurde, die Logik sei eine zufällige Theorie, die erst durch die Erfahrung ihre Bestätigung finde, so sieht man, daß bei Schülern erst recht die Ansicht auftreten kann, eine Axiomatik der Logik sei empirisch - z. B. durch psychologische Untersuchungen - zu rechtfertigen. Eine "ungeschickte" Didaktik kann einem Psychologismus das Tor öffnen. Die Ausgezeichnetheit der operativen Interpretation der Logik zeigt sich, unter anderen im Verlauf der Arbeit zur Sprache kommenden Aspekten, gerade darin, daß sie die Anwendbarkeit logischer Sätze auf die Erfahrung klar herausstellt, ihre Fundierung aber unabhängig von der Erfahrung leistet. Wenn dem aber so ist, kommt ihr auch für die Didaktik der Physik Bedeutung zu.

Die Logik Lorenzens entsteht aus einer Reflexion der Bedingungen der Möglichkeit des Beweisens von Aussagen. Das meint aber für Aussagen der Mathematik oder etwa Physik: Treten in ihr Aussagen auf, so bedingt diese Tatsache alleine schon ihre "Unterwerfung" unter logische Gesetze. Ist dies einmal erkannt, so wird auch niemand bezweifeln, daß selbst für die Entwicklung eines "kritischen Bewußtseins" als eine pädagogische Zielsetzung ein "Collegium Logicum" am Anfang stehen muß.

Logische Regeln in ihrer einfachsten Form benutzen Kinder schon, wenn sie sprechen gelernt haben. Schlägt man

z. B. einem Fünfjährigen vor, er könne Fußball spielen oder schwimmen gehen, erfährt man dann aber, das Schwimmbad sei wegen Renovierungsarbeiten vorübergehend geschlossen, so wird das Kind wie selbstverständlich Fußball spielen gehen. Die geistige Operation, die dem zugrunde liegt, besteht aus der Form "A oder B" und "nicht B" also "A". Der Schluß ist ein logischer, denn er gilt qua Form. A und B können die verschiedensten Bedeutungen besitzen.

Ein anderes Beispiel sei etwa aus einer Diskussion gegriffen: "Wenn ein Arbeiter darum nicht streikte, weil er kein Kommunist ist, so würde er streiken, wenn er Kommunist wäre. Nun aber streiken einige Kommunisten nicht. Was ergibt sich hieraus? Also streikt der Arbeiter nicht darum nicht, weil er kein Kommunist ist" [1]. Es ist klar, daß man kein Logiker sein muß, um den vorgelegten Schluß zu durchschauen, doch wird niemand die Vorteilhaftigkeit einer solchen Schulung gerade im Hinblick auf das letzte Beispiel bestreiten.

Eine Didaktik der formalen Logik muß ihre Aussagen, sollen sie als exakte gelten, notwendig zu Werkzeugen machen [2]. Gerade dieser "instrumentale Charakter der formalen Logik" [3] findet sich in deutlichster Ausarbeitung in der operativen Logik Lorenzens. Logische Operationen sind nach ihm solche - wie noch auszuführen ist -, die in allen Kalkülen zulässige Regeln vollziehen.

---

1) Beide Beispiele finden sich in modifizierter Form bei P. Lorenzen, in "Collegium Logicum", abgedruckt in: P. Lorenzen "Methodisches Denken", S. 10 f.

2) Daß die Exaktheit der formalen Logik Aussagen zu Werkzeugen machen läßt, hat Frege ausgedrückt in seiner Arbeit, Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, in G. Frege, Funktion, Begriff, Bedeutung, Fünf logische Studien, Hrsg. G. Patzig, Göttingen 1966

3) L. Eley, Metakritik der formalen Logik, S. 57

b) Die Aufgabenrechnung Kolmogorows als operative Interpretation der intuitionistischen Logik

Aristoteles versteht die Logik als τέχνη in der Abhebung vom ἐπιστήμη . Hier zeigt sich schon ansatzweise eine operative Auffassung der Logik, auf die aber in der Vorbereitung der Lorenzenschen Logik nicht eingegangen werden soll. Logik hat es in ihrer Interpretation als τέχνη mit Handlungen zu tun. Hierzu soll im folgenden kurz die Interpretation der intuitionistischen Logik Brouwers als Logik der Aufgabenrechnung durch A. N. Kolmogorow [1] vorgestellt werden. Brouwers Logik, die unabhängig vom Satz des ausgeschlossenen Dritten sein soll, wurde erst 1930 von seinem Schüler Heyting in ein axiomatisches System gefaßt. Doch läßt diese axiomatische Formulierung, wie eine jede andere auch, die schon vorher angesprochene Begründung der Logik offen und damit mögliche heuristische Erschleichungen zu. Wenn aber die Mathematik selbst begründende Interpretationen einer axiomatischen Logik anbietet, darf eine Didaktik nicht an ihr vorbeisehen.

Zur Terminologie Kolmogorows sei bemerkt, daß "Aufgabe" dem Heytingschen Terminus "Erwartung", oder allgemeiner "unerfüllte Intention" im Sinne einer Phänomenologie Husserls entspricht. Für unsere Zwecke denke man hierbei an Aufgaben innerhalb einer Mathematik. "Neben der theoretischen Logik, welche die Beweisschemata der theoretischen Wahrheiten systematisiert, kann man die Schemata der Lösungen von Aufgaben, z. B. von geometrischen Konstruktionsaufgaben, systematisieren. Dem Prinzip des Syllogismus entsprechend tritt hier z. B. das folgende Prinzip auf: Wenn wir die Lösung von b auf die Lösung

1) A. N. Kolmogorow, Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Mathematische Zeitschrift 25, 1932

von a und die Lösung von c auf die Lösung von b zurückführen können, so können wir auch die Lösung von c auf die Lösung von a zurückführen" [1].

Die Begriffe "Aufgabe" und "Lösung der Aufgabe" gehen dann zwar undefiniert, aber doch auf Grund von Beispielen hinreichend erläutert in eine Didaktik ein. Der Ansatz von Kolmogorow führt dann aber zu einer neben der theoretischen Logik stehenden neuen "Aufgabenrechnung". Aber damit erhält man das "merkwürdig" anmutende Ergebnis, daß die Form der Aufgabenrechnung mit der von Heyting formalisierten Brouwerschen Logik zusammenfällt.

Die sich aus logischen Partikeln zusammensetzenden Aufgaben sind dann nach Kolmogorows Muster etwa folgendermaßen zu definieren:

Man habe mit a und b zwei Aufgaben vorliegen.

Dann sei mit a $\wedge$ b (a und b in Worten) genau diejenige Aufgabe bezeichnet, die sich in der Aufforderung, "beide Aufgaben a und b sind zu lösen", ausdrückt.

Mit a $\vee$ b (a oder b) werde dann diejenige Aufgabe bezeichnet, die auffordert, "mindestens eine der Aufgaben a und b sind zu lösen".

Die Bezeichnung a $\supset$ b (wenn a, dann b) führt dann diejenige Aufgabe ein, die sich etwa folgendermaßen formulieren läßt: "Vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, löse man b". Dies kann man auch so schreiben: "Die Lösung von b ist auf die Lösung von a zurückzuführen".

---

1) a, b, c bezeichnen hier Aufgaben.
A. N. Kolmogorow, a. a. O., S. 58

Für die Negation ist die folgende Einführung möglich: $\neg$ a (nicht a) bezeichnet die Aufgabe: "Vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, einen Widerspruch herbeizuführen". Die Negation ist über den Widerspruch definiert, da nicht die Voraussetzung gilt, jede Aufgabe sei lösbar.

Hat man so die jeweilige Zusammensetzung von Aufgaben durch $\wedge, \vee, \supset, \neg$ zu neuen Aufgaben festgesetzt, so besteht die weitergehende Forderung darin, jegliche Zusammensetzung mit Hilfe dieser Zeichen zu R(a, b, c, ...) ebenfalls als Aufgabe anzusehen.

Legt man nun noch die Bezeichnung a(x) dahingehend fest, darunter eine Aufgabe zu verstehen, deren Sinn vom Wert der Variablen x abhängt, dann läßt sich $\bigwedge_x$ a(x) wie folgt definieren: $\bigwedge_x$ a(x) bezeichnet diejenige Aufgabe, zu deren Lösung es nötig ist, imstande zu sein, für jeden vorgegebenen Einzelwert x_o von x die Aufgabe $a(x_o)$ nach einer endlichen Anzahl von im voraus, also vor der Wahl von x_o, bekannten Schritten zu lösen. Dies soll nichts anderes heißen, als daß $\bigwedge_x$ a(x) auffordert, eine allgemeine Methode für die Lösung von a(x) bei jedem vorgelegten Wert x anzugeben.

Der Zweck der Aufgabenrechnung besteht nun darin, Lösungen von Aufgaben der Form $\bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c$ R(a, b, c) anzugeben, und zwar durch mechanische Anwendung einiger weniger Rechenregeln. Eine genaue Ausführung dieser Gedanken führt an dieser Stelle zu weit.

Es sei nur noch kurz angedeutet, daß als Postulat das Vorliegen der Lösungen der Brouwer-Heytingschen Axiome - interpretiert als Aufgaben - gesetzt ist. Damit liegt dann aber ein Beweisschemata der Aufgabenrechnung vor,

das sich in formaler Übereinstimmung mit der intuitionistischen Logik befindet. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten der klassischen Logik gilt hier selbstverständlich nicht mehr, denn dies hieße ja mit Kolmogorows Worten ausgedrückt: "Eine allgemeine Methode anzugeben, um für jede Aufgabe a entweder eine Lösung zu finden, oder aus der Gegebenheit von einer Lösung einen Widerspruch abzuleiten" [1]. Diese Möglichkeit trifft allgemein nicht zu, "wenn sich der Leser nicht für allwissend hält" [2].

Man könnte aber jetzt auf die Idee kommen, Lösen von Aufgaben sei eine individuelle Angelegenheit, die unter das Motto fällt: "Herr Lehrer, ich habe meine Aufgabe gelöst". Einige Mühe wird es sicherlich kosten, den Lernenden so weit zu bringen, daß die Lösung einer Aufgabe nur dann vorliegt, wenn eine Handlung, eine Konstruktion angegeben ist, die für "jedermann" nachvollzogen werden kann, deren Wesen in Allgemeingültigkeit besteht.

Der didaktische Wert der Kolmogorowschen Interpretation der Brouwerschen Logik findet sich in der Betonung des operativen Momentes der Logik. Sie hat es nur mit Handlungen, eben den Aufgaben, und ihren Lösungsvollzügen zu tun.

Daraus resultiert aber ein wichtiges Ergebnis für ihre Verwendung: Aufgaben bedeuten für jede Altersstufe etwas verschiedenes. So wird man in der Grundschule sicherlich unter Aufgaben aufzusuchende Handlungen mit konkretem Material verstehen, während bei älteren Schülern gesuchte abstrakte Konstruktionen als Aufgaben gesetzt sind. Da es sich hier nur um programmatische Zielsetzungen handeln soll, bleibt der Verweis auf eine prinzipielle

1) A. N. Kolmogorow, a. a. O., S. 63
2) A. N. Kolmogorow, a. a. O., S. 63

Durchführbarkeit der Erstellung der intuitionistischen Logik aus ihrer Interpretation als Aufgabenrechnung. Was man dabei unter Aufgaben versteht, muß sich selbstverständlich der jeweiligen Altersstufe der Kinder anpassen.

Der wesentliche Vorzug einer solchen Logik besteht eben darin, daß für sie das didaktisch so wichtige operative Moment aber selbst schon immanent konstitutiv ist. Dies trifft ganz allgemein für jeden konstruktiven Aufbau der Logik und der Mathematik zu.

c) Wittgensteins Analyse der Operation; wiederholbare Handlungen

Zur Erhellung des Operationsbegriffs seien nun noch einige Ausführungen Wittgensteins angeführt. Auf Ausführlichkeit darf an dieser Stelle verzichtet werden, da sonst der Rahmen dieser Arbeit gesprengt würde [1].

Wittgenstein erklärt den Zusammenhang eines zusammengesetzten Satzes als Wahrheitsfunktion in Abhängigkeit der Elementarsätze, die ebenfalls Wahrheitsfunktionen bilden, operativ: "Wir können diese internen Beziehungen dadurch in unserer Ausdrucksweise hervorheben, daß wir einen Satz als Resultat einer Operation darstellen, die ihn aus anderen Sätzen (den Basen der Operation) hervorbringt" [2]. Hiermit stellt Wittgenstein deutlich die

1) Es sei an dieser Stelle auf die einschlägige Wittgenstein-Literatur verwiesen. Eine ausführliche Gesamtinterpretation findet sich in M. Lang, Wittgensteins Philosophische Grammatik, Entstehung und Perspektiven der Strategie eines radikalen Aufklärers, phil. Dissertation Köln 1971. Oder - für die dargestellte spezielle Problematik - F. Kambartel, Erfahrung und Struktur, S. 118 ff.

2) L. Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus, 1918, in Schriften I, Frankfurt 1960, 5.21

operative Auffassung des Satzes heraus.

Unter Operation versteht Wittgenstein genau das, was aus einem Satz den anderen macht. (Tractatus 5.23) Die "logische Konstruktion" wird durch den Begriff der Operation eingeführt. Die Operation tritt da auf, wo ein Satz aus einem anderen entsteht, und zwar auf logisch bedeutsame Weise, d. h. dort, wo der Anfang der logischen Konstruktion des Satzes liegt.

Das Wesentliche des Operationsbegriffes besteht in der Möglichkeit des Weiterschreitens von Glied zu Glied innerhalb einer Formenkette, d. h., das Resultat einer Operation findet auf der gleichen "Höhe" wie die Ausgangsgegebenheit der Operation statt. Die Operation hebt sich damit in Wittgensteins "Tractatus" vom Funktionsbegriff ab: Die Typentheorie Russells verschwindet. "Russell und Whitehead haben die Möglichkeit dieses Fortschreitens nicht zugegeben, aber immer wieder von ihr Gebrauch gemacht" [1].

Der "Verneinung", "logischen Addition", "logischen Multiplikation" usw. ist hiermit eine operative Interpretation gegeben worden: Die Elementarsätze bilden die Basis. Über ihr sind die Sätze, die aus logischen Partikeln zusammengesetzt sind, als O p e r a t i o n e n gedeutet.

Es kann nun aber das Ergebnis einer bestimmten Operation wiederum Basis für ihre eigene Anwendung werden. Damit liegt nun aber die Möglichkeit einer sukzessiven Anwendung der gleichen Operation vor: Hierin findet sich also das Charakteristikum der natürlichen Zahlen und somit die gesamte "konkrete" Mathematik. Mit der sich wiederholenden Anwendung einer bestimmten Operation ist aber

1) Tractatus 5.252

nichts anderes gemeint als das vorher angesprochene aristotelische potentielle Unendliche, deren Wesen im "Immerwieder", im "und so weiter" beschlossen ist. "Die Zahl ist der Exponent einer Operation" [1]. Hier schließt sich Wittgenstein in seiner für ihn charakteristischen prägnanten aphoristischen Kürze den zu Anfang der Arbeit dargestellten Kantischen Reflexionen über den Zahlbegriff an: Zahlen messen die Wiederholungen von Handlungen.

Ω sei Symbol für eine Operation, ξ meine als Variable Zustände, auf die Handlungen (Operationen) angewendet werden können. $\Omega\,\xi$ bezeichnet dann den Zustand, der durch die Anwendung von Ω aus ξ hervorgeht. Der Unterschied zwischen einer allgemeinen Weise des Handlungsvollzugs (Operationsweise) und der konkreten Handlung selber (der bestimmt ausgeführten Operation, besondere Handlung) muß beachtet werden. Eine Didaktik muß diese Gedoppeltheit des Begriffs "Operation" stets berücksichtigen. So kann sie - etwa in Verbindung mit psychologischen Erkenntnissen - die besonderen Operationen "lerngemäß" ausgestalten, doch immer nur so, daß sie als jeweilige Fälle eines allgemeinen Handlungsvollzuges anzusehen sind. Eine wesentliche didaktische Schwierigkeit besteht jedoch darin, die Kluft zwischen jeweilig vollzogenem Fall (z. B. mit Dienes-Material) und der allgemeinen Handlungsanweisung, der R e g e l , nicht zu breit werden zu lassen.

Die hier vorgeschlagene Verwendung der operativen (von Lorenzen um 1950 auch konstruktiv genannten) Logik und Mathematik besitzt den zweifachen Vorteil, zum einen operativ aufgebaut zu sein und damit die Fähigkeit des Menschen, Handlungen ausüben zu können, voll auszunützen, zum anderen bieten sich, wie noch zu zeigen sein

1) Tractatus 6.021

wird, Realisierungen (besondere Handlungen) in enger Verbindung mit den allgemeinen Vorschriften geradezu an.

Lorenzens Aufbau der Logik und Mathematik kann interpretiert werden als der Versuch, jene Wissenschaften in Ansehung konkreter Handlungsvollzüge auszuformen [1]. Es erscheint damit nun allerdings verwunderlich, daß seine Gedanken bisher so wenig Beachtung innerhalb der Didaktik der Mathematik gefunden haben. Sicherlich ist ein Grund darin zu suchen, daß man Lorenzen unausgesprochen in die Nähe der Intuitionisten rückt und damit als Hilbertianer, als Formalist, als Axiomatizist ihm keine Beachtung mehr zu schenken nötig findet. Doch ist es müßig, Meinungen zu zitieren, von Wichtigkeit für eine Didaktik kann es aber sein, Ideologien zu entlarven, die Meinungen produzieren. [2]

Die Untersuchung des für eine Didaktik der Logik und Mathematik so wichtigen Operationsbegriffs (Handlungsbegriffs) hat uns von den Wittgensteinschen Reflexionen kurze Zeit zu allgemeineren Überlegungen geführt. Doch müssen hier nochmals Wittgensteins Ideen zu Wort kommen.

Wie schon bemerkt, lassen sich Operationen auf ihr Resultat anwenden: $\mathfrak{Op}$ ($\mathfrak{Op}\,\xi$) Fortgesetzte Anwendung einer Operation setzt voraus, daß sie auf das Ergebnis ihrer Anwendung stets wiederum anwendbar ist, kurz sie muß

1) Auf die trotzdem vorhandenen philosophischen Mängel kann hier nicht eingegangen werden, zumal sie für eine Didaktik der Mathematik ohne einschneidenden Belang sind. Siehe zur philosophischen Problematik eines operativen Ansatzes: L. Eley, Metakritik der formalen Logik.

2) Für einen Didaktiker der Mathematik wäre es nicht unwesentlich, die Thesen zu diskutieren, die etwa Kambartel im Rahmen einer Formalismuskritik formuliert: Z. B. "Nicht Schüler, sondern A n h ä n g e r gewinnt der Mengentheoretiker in seinen Vorlesungen". A. a. O., S. 241

wiederholbar sein. Unter den wiederholbaren Handlungen finden sich solcher Art ausgezeichnete, die im Verlauf ihrer sukzessiven Anwendungen niemals auf einen früher schon erreichten Zustand zurückfallen. Ein Beispiel dieses wichtigen Handlungstypus bildet das Anfügen eines Striches an eine schon geleistete Strichabfolge. Dieser für die konstruktive Grundlegung der Arithmetik so fundamentale Handlungsablauf wird späterhin noch ausführlich untersucht [1]. Hier sei nur soviel bemerkt, daß infolge der wachsenden "Länge" der Strichfolgen niemals ein früheres Stricharrangement erreicht wird.

d) "Wie oft?" - "Wie viel?"

Ein von Kambartel [2] angegebenes einfaches Beispiel einer Operation, die zu einem ehemaligen Resultat wieder zurückführt, sei als Randbemerkung noch erwähnt: Die Handlungsweise lautet dazu: Lösche einen Strich und setze dann einen neuen Strich. Wohin? Davor oder dahinter oder dorthin, wo vorher ein Strich gelöscht worden ist. Der Anfangszustand bilde z. B. vier Striche, man gelangt dann über mehrere Operationsschritte zum Anfang zurück.

Anfang:	||||
1. Schritt:	|:|||
2. Schritt:	||:||
3. Schritt:	|||:|
4. Schritt:	||||:

Operationen, die von ihrem Aufbau her Aussagen über die Häufigkeit ihrer schon vollzogenen Anwendung zulassen,

1) Er ist wohl von Hugo Dingler zum ersten Mal als Basishandlung zur Konstitution der Arithmetik benutzt worden.
2) F. Kambartel, Erfahrung und Struktur, S. 120

kommt eine besondere Wichtigkeit zu. Sie lassen sich, in physikalischer Terminologie gesprochen, in vorzüglicher Weise als "Meßinstrumente" für die Häufigkeit eines beliebigen Handlungsverlaufs verwenden. Die beliebige Handlung soll etwa so oft ausgeführt werden, wie sich Striche aus einer parallel hierzu bereitgestellten Strichfolge löschen lassen:

Beliebige Handlung:
(1) Anfangszustand: Z
Z ⟹ Z' ⟹ Z'' ⟹ Z''' ⟹ Z'''' ⟹ Z'''''
Meßoperation:
(2) Anfangszustand: |||||
||||| ⟹ |||| ⟹ ||| ⟹ || ⟹ | ⟹ :

Mittels der Meßoperation bietet sich also die Möglichkeit, das "Wie oft?" einer nach Belieben vorgegebenen Handlungsanweisung zu bestimmen. Hiermit ist aber auch gleichzeitig ein Verfahren vorgelegt, einer Frage nach dem "Wie viel?" einer vorgegebenen endlichen Gegenstandsansammlung, die nicht notwendig jeweilig gleich zu sein brauchen (etwa nur aus Äpfeln bestehen), einen Sinn zu geben. Die Handlungsanweisung laute etwa: "Nimm jeweils einen Gegenstand weg". Das "Wie oft?" der Meßoperation kann dann als "Wie viel?" der Gegenstandsansammlung interpretiert werden.

Wittgensteins Satz: "Die Zahl ist der Exponent einer Operation" erfährt durch diese Ausführungen eine kurze Analyse, doch wird auf ihn, infolge der Nähe zum Lorenzenschen Ansatz, bei der Behandlung der operativen Begründung der Arithmetik noch ausführlich eingegangen.

e) Logische Schlüsse als Handlungen

Zu Beginn dieses Kapitels wurde der Terminus "Logik" eingeschränkt auf "formale Logik", als Lehre des logischen Schließens. In einer Didaktik besteht die Schwierigkeit nun aber darin, einzuführen, was ein logischer Schluß ist. Sicherlich erkennt man allgemein an, daß eine Situation vorliegen muß, in der von einer Aussage auf eine andere überzugehen ist. Doch wann nennt man solch einen Übergang logisch gültig?

Üblicherweise liefert die Semantik eine vermeintliche Rettung aus dem Dilemma: Ausgangspunkt ist die Voraussetzung, jede Aussage sei doch entweder wahr oder falsch; die logisch-gültigen Aussagen sind dann diejenigen Regeln, die von wahren Aussagen stets zu wahren Aussagen führen.

Wie findet man aber einen didaktischen Zugang zu dieser gemachten Voraussetzung? Genauer geht es darum, die berechtigte Frage eines Lernenden zu beantworten, woher man denn wisse, wann eine Regel eben gültig sei. Die Beantwortung solch einer Frage wird dann im Felde metasprachlicher Formulierungen versucht. Z. B. greift man zur Erläuterung des Schlusses darii

P a Q , Q i R —> P i R

zu folgenden metasprachlichen Ausführungen: Für wie auch immer gewählte Prädikate P, Q, R ergibt sich aus der Wahrheit von P a Q und Q i R allemal die Wahrheit von P i R. Doch macht man hier nicht schon wieder stillschweigend vom Schlusse darii Gebrauch? Die Schwierigkeit liegt in der Benutzung von Definitionen, die sich auf "Wahrheit" und "Falschheit" stützen. Die erwähnten didaktischen Schwierigkeiten sind selbstverständlich nicht nur als didaktische eben solche, sondern finden

ihre Wurzeln in der Zwickmühle der Fundierung formaler Logik.

f) Protologik, geregelte Handlungen als Anfang der formalen Logik

Hier soll nun ein Einstieg in die formale Logik expliziert werden, der seinen Ausgang in der Protologik [1] findet. Vorher wurde als Basis der Übereinstimmung konkurrierender, hier nicht weiter zu erörternder Logikbegründungen jedenfalls jene Ansicht angeführt, die logisches Schließen als Übergehen von einer Aussage zur anderen versteht, wobei dann noch Zusatzbedingungen einzubauen sind, etwa in der angegebenen Art. Festzuhalten bleibt jedoch die Gemeinsamkeit: Logisches Schließen heißt Übergehen von einer Aussage zu einer anderen. Dieses Übergehen ist aber nichts anderes als eine Handlung, eine Operation, die nach bestimmten Regeln sich vollzieht.

Im weiteren wird von einem geregelten Operieren, von einem geregelten Handeln gesprochen, wenn der Unterschied zu willkürlichen Operationen, Handlungen betont sein soll [2]. Da die letzten Operationen im folgenden nicht genauer untersucht werden, meint auch kurz Operieren jenes geregelte Operieren. Die Behandlung von Operationen führt damit aber schon in das Gebiet der Protologik.

Es sei auf eine wichtige Unterscheidung aufmerksam ge-

1) Dieser Terminus stammt von Lorenzen. Siehe etwa P. Lorenzen, Einführung in operative Logik und Mathematik, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1955
2) Hiermit ist das gemeint, was Lorenzen schematisches Operieren nennt. Siehe angegebene Literatur.

macht, die bereits in der Ausführung des Wittgensteinschen Operationsbegriffs zur Sprache kam: Die Protologik als Vorfeld der formalen Logik beschäftigt sich mit geregelten Operationen, sie macht sie zum Gegenstand ihrer Untersuchungen, und zwar so, daß sie die Bedingungen ihrer Möglichkeit untersucht. Sie unternimmt den Versuch, Aussagen über jegliches Operieren aufzustellen. Sicherlich ist auch das Domino-Spielen ein geregeltes Operieren, doch interessiert die Protologik nicht die sich innerhalb dieses speziellen Operationssystems ergebenden Aussagen. Sie ist vielmehr auf Allgemeinheit aus. Damit kündigt sich schon ein wesentliches Moment der formalen Logik an.

Es werde festgehalten: Anfang der Logik sei geregeltes Operieren!

Ist dies aber Anfang der Logik, so muß eine ihr zugehörige Didaktik von geregeltem Handeln ausgehen. Sie kann sich dazu aber auf die Geläufigkeit dieses Begriffs stützen. Um ihn jedoch bewußt einzuüben, sind Beispiele vorzuführen, die den Operationsbegriff illustrieren. Das Aneinanderfügen von Spielsteinen etwa bildet ein ganz einfaches Beispiel. Da eine Fülle von geregelten Spielen wohl jedermann bekannt ist, kann auf eine Angabe von exemplarischem Material hier verzichtet werden. Zu beachten bleibt jedoch bei der Einführung von Operationen, daß sowohl das Material wie auch die Regeln in v i e l f ä l t i g s t e r Form vorzuführen sind. Operationen sind aber nicht, was selbstverständlich ist, an konkretes Material gebunden. Das angegebene "Schwimmbadbeispiel" weist auf Operationen im sprachlichen Bereich hin. Doch müssen gerade Beispiele der letzten Art mit größter Vorsicht angeführt werden, um sich nicht vorzeitig mit der schwierigen Problematik von Logik und Sprache zu belasten.

In einem ersten Schritt führen also Operationen an konkretem Material jenen Begriff ein. Nach und nach löst man sich jedoch von der vollen Breite konkret zur Verfügung stehender Dinge und greift zu Figuren, die etwa aus

o, +, *, □, ◎, ...

entstehen. Das angegebene Beispiel der Aneinanderfügung von Steinen läßt sich nun wie folgt formulieren:

Es liegt eine bestimmte Anzahl von Zeichen, o, vor.

Beginne mit dem Hinlegen von o.
Füge dann an die erste Figur o einen weiteren "Spielstein" o an: o o
Setze hieran wiederum einen Spielstein o an: o o o
usw.

Oder in anderer Formulierung:

(Spiel-)Material: o
Beginn: Lege eine Spielfigur: o
Operation (= Spielregel): Wenn eine bestimmte Spielfigur realisiert vorliegt, lege einen weiteren Spielstein rechts an.

Oder in einer weiteren Formulierung, wenn A als Variable für Figuren stehen soll, die aus o gebildet werden:

(Spiel-)Material: o
Beginn: o
Regel: Aus A mache A o

Oder, wenn der Pfeil ==> zur Mitteilung der Regel benutzt werden soll:

K_1	(Spiel-)Material:	o	(M)
	Beginn:	o	(B)
	Regel:	A ⟹ A o	(R)

Der Pfeil ⟹ drückt also weder die logische Implikation noch Subjunktion aus, sondern dient lediglich der Symbolisierung der Grundregel (R). ⟹ steht für "von ... zu ..." oder "wenn ..., dann mache ...".

Die Figuren, die aus dem Material, hier o, zusammengesetzt sind, nennt man auch Erzeugnisse oder Aussagen des Operationsverfahrens.

Ausgangsmaterial bilden Figuren wie o, *, □, ⊕, ... So wie ein Kind Spielsteinchen, die "calculi", in einem konstruktiven Spiel verwendet, sollen auch die erwähnten Figuren gebraucht werden. Sie meinen nichts anderes als die in realen Spielsituationen benutzten calculi. Doch sind die konkreten Spielsteine in der ursprünglichsten Fassung ihrer Bedeutung stets noch in ihrer Verwendung abhängig vom technischen Gerät: Stricken kann man halt nur mit Nadeln, und seine Hände muß man wohl auch dazu einsetzen. Der Übergang zu calculi der Art o, □, ×, +, ⊖, ... zieht eine Lösung von alltagsweltlichen Bedingungen nach sich. Die Steine unterstehen z. B. nicht mehr physikalischen Bedingungen.

Damit kommt genau die Eröffnung neuer Möglichkeiten ans Licht, die schon an früherer Stelle beim Übergang von Euklids Axiomensystem zu modernen "Zeichenaxiomatiken" behandelt wurde. Doch sei nochmals darauf hingewiesen, daß hier nicht eine neue Axiomatik vorgestellt wird.

In Ansehung des historischen Wortes "calculi" nennt man nun ein geregeltes Verfahren zur Herstellung von Figuren K a l k ü l .

Durch die Verwendung von Zeichen o, +, □, ... und die damit geleistete Befreiung von konkret lebensweltlichen Bedingungen schält sich der reine Handlungscharakter des Kalküls heraus und bildet somit das Fundament einer operativen Mathematik [1].

Um Mißverständnisse abzuwehren, sei bemerkt, daß nicht die jeweiligen Realisierungen der Figuren (der Erzeugnisse, der Aussagen des Kalküls) als Basis der formalen operativen Logik und Mathematik zugrunde gelegt sind. Mathematik soll nicht auf Empirie, auf technischen Realisierungen fußen. Eine Didaktik hat also hiernach zu berücksichtigen, daß der empirische Vollzug dem Kalkül gleichgültig ist, gleichwohl wird sie ihn an empirischen Handlungen einführen.

Auf psychologischem Fundament stehend, bemerkt Dienes: "Der konstruktive Aspekt, ..., wird besonders betont. Zeitweilig war die Einstellung in mathematischen und wissenschaftlichen Kreisen eine vorwiegend formalistische, die durch eine Art Vergötterung von Ideen wie denen in Russells 'Principia Mathematica' gekennzeichnet ist. Diese hat wahrscheinlich das erzieherische Denken auf dem Gebiet des Lernens von Abstraktionen um Jahrzehnte zurückgeworfen. Die simple psychologische Tatsache, daß Konstruktion der Einsicht vorangehen muß, ist lange übersehen worden" [2]. Doch beruht Logik nicht, wie Dienes meint, auf dem Nachdenken über die Gesetzmäßigkeiten von Strukturen. Logik kann, wie sich hier zeigt, auf Erfahrung im Sinne des Handelns gegründet werden.

---

1) Vgl. hierzu auch das "elementare" Handeln in den formalen Sprachen z. B. H. Maurer, Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen, Mannheim 1969, oder H. Hermes, Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1961

2) Z. P. Dienes, Aufbau der Mathematik, Freiburg 1965

Auch für sie besteht die Möglichkeit der konstruktiven Grundlegung.

Der Kalkül ist derselbe gegenüber allen empirischen Vollzügen, gleichgültig ob er mit Bleistift oder Kreide, ob er jetzt oder später, ob er von mir oder einem anderen ausgeführt wird. Trotzdem heißt operieren nichts anderes als wirkliches Handeln. Wahrheit und Falschheit lassen sich, wie noch zu zeigen ist, vom Handeln her begreifen [1].

Der logische Prozeß der Abstraktion, der hier hereinkommt, muß trotzdem an dieser Stelle noch nicht behandelt werden, denn geregeltes Handeln lernt man auch ohne Abstraktion. Ein Kind lernt z. B., den Arm hin und her zu bewegen schon lange bevor es über "das Hinundherbewegen des Armes" Aussagen mitzuteilen vermag.

Handeln soll durch Handeln gelernt werden.

Das hat jedoch zur Voraussetzung, daß dem Handeln Stützen gegeben sein müssen, die zwar ihren Sinn nur im Handlungssystem selbst besitzen, ihm aber vorgegeben sind, will Handeln sich durch Handeln bestimmen. Der Handlungsvollzug geschieht an Grundmaterialien z. B. o, +, insofern sind ihm Gegebenheiten notwendig, diese selbst haben aber ihren Sinn nur in Kalkülen, dem Handlungsverfahren, sie sind nicht unabhängig von ihm, andererseits bleibt aber das Handeln selbst außerhalb der Gegebenheiten. Handlung und Gegebenheiten verweben sich innerhalb des Kalküls, ja sie konstituieren ihn so erst.

---

1) Philosophisch heißt dies aber nichts anderes, als daß erst von der transzendentalen Subjektivität her mit Recht vom Herstellen gesprochen werden kann. Siehe L. Eley, Metakritik der formalen Logik, z. B. S. 60

Ein Kalkül besteht aus:

1) Grund-Material, den Bausteinen [1], in endlicher Anzahl
o, □, +, *, ...
Figuren, die Erzeugnisse, setzen sich zusammen aus den Bausteinen.

2) Die Anfänge, sie bestehen aus Figuren, mit denen der Handlungsvorgang anhebt.

3) Regeln, die festlegen, wie aus bereits hergestellten Figuren weitere zu bilden sind. Sie liest man als Imperative: "Mache es so und so!" Genauer: "Wenn dies ... vorliegt, mache jenes ...", "aus ..., konstruiere ...". Die Regeln können zur Herstellung neuer Figuren jederzeit in beliebiger Reihenfolge angewandt werden.

Um den Kalkül anzuschreiben, verwendet man die Zeichen x, y, ... als Objektvariable, Aussagenvariable für Figuren, den Pfeil $\Longrightarrow$ und das Komma zur Abtrennung von Prämissen.

Allgemein formuliert, hat demnach ein K a l k ü l die folgende Gestalt:

Liste der Bausteine: .....
Liste der Variablen: .....
Anfänge: $A_0, \ldots, A_m$

Regeln: $A_1^1, \ldots, A_{n_1}^1 \Longrightarrow A^1$

$A_1^2, \ldots, A_{n_2}^2 \Longrightarrow A^2$

.
.
.

1) Lorenzen spricht von Atomen.

Hierbei sind die A_i^j aus den Bausteinen und etwaigen Variablen zusammengesetzte Figuren. Die Anfänge sind variablefreie Figuren. In den A^k dürfen (außer den Bausteinen) nur die A_t^k bzw. etwaige Variable der A_t^k vorkommen. Selbstverständlich deuten die verwendeten Punkte nur endliche Fortsetzungen an.

Es sei sofort ein Beispiel gegeben:

K_2	Bausteine:	□, *	
	Variable:	x	
	Anfänge,	□	(S_1)
	(Startmöglichkeiten):	*	(S_2)
	Regeln:	x ⟹ x □ *	(R_1)
		x ⟹ □ x □	(R_2)

In solch einem Kalkül läßt sich etwa die Figur, auch Aussage genannt, □ □ □ * □ □ * □ * herstellen. Man spricht dann auch von einer A b l e i t u n g innerhalb des Kalküls.

Start:	□	(S_1)
1. Schritt:	□ □ *	(R_1)
2. Schritt:	□ □ □ * □	(R_2)
3. Schritt:	□ □ □ * □ □ *	(R_1)
4. Schritt:	□ □ □ * □ □ * □ *	(R_1)

Die angegebene Figur (Aussage) läßt sich also innerhalb des angegebenen Kalküls ableiten. Sie hat aber auch nur Sinn vermöge dieses Kalküls.

Zusammenstellungen von Zeichen, die sowohl Bausteine als auch Objektvariable (Aussagenvariable) enthalten, werden auch im folgenden Figurformen (Aussageformen) genannt.

In dem angegebenen Kalkül läßt sich z. B. * * nicht ableiten, da als Startfigur (S_1) □ gewählt werden mußte, dann aber nur * □ * (R_1) oder □ * □ entstehen kann.

Ein weiteres Beispiel:

K_3 Baustein: |
Variable: x
Start: |
Regel: x ⟹ x|

Der Anfang des Kalküls bildet |, dann konstruiert man ||, danach |||, ... [1]. Was hier vorliegt, ist nichts anderes als eine Steinzeitnotation der natürlichen Zahlen, die im Kapitel über die operative Arithmetik noch näher untersucht werden.

Den Kalkül K_3 kann man ansehen als die formelmäßige Verkürzung der zu Beginn von Kant ausgeführten Reflexionen über die Zahlen. Der Kantische Konstruktionsbegriff wird hier wieder aufgenommen, die philosophisch anmutenden Ausführungen des Anfangs dienen damit aber dem wichtigen Verständnis des Konstruktionsbegriffs, sie stellen ihn in einen weiteren Rahmen und leisten damit eine didaktische Aufgabe.

Das Entscheidende des Kalküls K_3 ist das ständige Wiederholen ein und derselben Operation: Die Zahlen sind die "Exponenten" dieser Operation.

In den bisherigen Beispielen wurde bisher nur aus einer einzigen, schon hergestellten Figur (Aussage) die neue nach Maßgabe der Regel konstruiert. Nun soll noch ein

1) K_3 unterscheidet sich nur durch die Bausteine von K_1.

weiteres Beispiel vorführen, wie aus zwei vorliegenden Figuren durch Aneinanderfügen die zu konstruierende Figur entsteht:

K_4 Bausteine: ⊕, □
Variable: x, y
Anfang: ⊕
Regel 1: x ⟹ □ x (R_1)
Regel 2: x, y ⟹ x y (R_2)

Um die Ableitungsschritte in einem Kalkül eindeutig festzulegen, führt man die folgende Bezeichnung ein, die anzeigen soll, welche Ersetzungen in den angegebenen Regeln vorzunehmen sind:

Z. B. R_1 (⊕ ⊕) heiße: Setze in R_1 für x die Figur ⊕ ⊕.
R_2 (⊕, □ ⊕): Setze in R_2 für x die Figur ⊕, für y die Figur □ ⊕.

Die Ableitung der Figur □ □ ⊕ □ □ ⊕ □ □ ⊕ stellt sich wie folgt dar:

1.: ⊕ (A)
2.: □ ⊕ (R_1)
3.: □ □ ⊕ (R_1)
4.: □ ⊕ □ □ ⊕ (R_2)
angewandt auf 2 und 3
5.: □ ⊕ □ □ ⊕ □ □ ⊕ (R_2)
angewandt auf 4 und 3
6.: □ □ ⊕ □ □ ⊕ □ □ ⊕ (R_1)
angewandt auf 5

Mit der angegebenen Notation geschrieben, lautet eine Ableitung (Konstruktion) der vorgelegten Figur:

1.: A, 2.: R_1 (1), 3.: R_1 (2), 4.: R_2 (2, 3),
5.: R_2 (4, 3), 6.: R_1 (5).

Im Kalkül K_4 läßt sich die Figur
□ □ ⊕ □ □ ⊕ □ □ ⊕ auch noch durch einen anderen Handlungsverlauf (Konstruktionsverlauf) erzeugen:

1.:	⊕	(A)
2.:	□ ⊕	(R_1) (1)
3.:	□ □ ⊕	(R_1) (2)
4.:	□ □ ⊕ □ □ ⊕	(R_2) (3, 3)
5.:	□ □ ⊕ □ □ ⊕ □ □ ⊕	(R_2) (3, 4)

Man sieht, daß hier im 4. Schritt die Regel R_2 angewandt worden ist in der Form
□ □ ⊕, □ □ ⊕ ⇒ □ □ ⊕ □ □ ⊕.
Dies ist erlaubt, denn x und y steht als Variable für Figuren, von deren Verschiedenheit nicht die Rede ist. Bisher wurde über das Vermögen, Figuren zu vergleichen, noch nicht gesprochen, doch muß wohl unterschieden werden zwischen einem Vermögen, dessen wir uns bedienen können, und den Aussagen eben über jene Fähigkeit.

Die angegebene Formulierung eines Kalküls stellt nichts anderes dar als ein Schema des geregelten Handelns, doch geht das geregelte Handeln selbst dem Reden über geregeltes Handeln methodisch voraus. Der Lernende besitzt das Vermögen, Operationen ausführen zu können, andererseits baut sich aber die operative Logik und Mathematik auf dieser Fähigkeit auf. In der Übereinstimmung dieses wesentlichen Momentes sowohl beim Lernenden als auch bei dem zu Lernenden mit all seinen lernpsychologischen Konsequenzen zeigt sich ein wichtiger didaktischer Vorzug des hier dargestellten Aufbaus.

Doch zurück zu Gleichheit und Verschiedenheit.

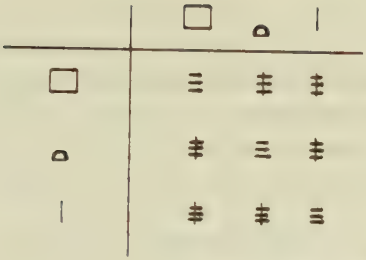
Zur Ableitung einer Figur innerhalb eines vorgelegten Kalküls, d. h. zum Aufbau einer bestimmten Bausteinkonfiguration mittels vorgelegter Regeln, kommt der Vergleich von Figuren notwendig zur Anwendung. Es muß zum Beispiel eine schon hergestellte Figur verglichen werden mit den in einer Regel angegebenen Aussagen. Die Fähigkeit, vergleichen zu können, gehört neben anderen Vermögen zu den Grundbedingungen, die jeder geregelt Handelnde schon mitbringt. Doch enthebt das nicht der Aufgabe, diese Grundbedingung des operativen Aufbaus so festzulegen, daß sie für einen methodischen Aufbau einer operativen Mathematik, der selbst wieder operativ ist, verwendbar ist. Eine Didaktik leistet aber diese Aufgabe durch schrittweise Symbolisierung der schon handelnd benutzten Fähigkeit.

Für die Gleichheit von zwei Figuren F, G führt man das Zeichen $\equiv$ ein. $F \equiv G$ bedeutet also, die Figuren F und G sind gleich. Die Ungleichheit symbolisiert das Zeichen $\not\equiv$.

Doch was versteht man unter Gleichheit von Figuren? Wie ist sie operativ induktiv zu definieren? [1)]

Dazu liefert ein Tableau die eindeutige Festlegung der Verwendung von $\equiv$ bzw. $\not\equiv$, und zwar zuerst einmal für die "einfachsten" Figuren, die Bausteine:

1) Auf den Unterschied, der zwischen den konstruktiven Definitionen (und Beweisen) und den herkömmlichen expliziten besteht, wird späterhin noch eingegangen.



Da die Bausteine immer von endlicher Anzahl sein sollen, läßt sich solch eine Tabelle stets angeben. Hier findet sich nichts anderes als die altbekannte vorprotologische Tatsache, nach der z. B. □ von ◘ verschieden ist und □ nur mit □ übereinstimmt.

Durch die Aufstellung der Tabelle ist damit aber ein Bewußtwerden der im Handeln vergessenen Vermögen geleistet, und zwar durch Fixierung ihres Gebrauchs.

In der exakten Bestimmung des Vergleichs der Grundbausteine findet aber auch der allgemeine Vergleich von Figuren (Zusammensetzungen von Spielmarken) sein Fundament. Hierzu setzt man etwa zwei Figuren untereinander und vergleicht der Reihe nach, z. B. von links nach rechts, die an den entsprechenden Stellen stehenden Bausteine. Steht dann an einer Stelle ein Baustein, der sich an derselben Stelle in der zweiten zu vergleichenden Figur nicht findet, so heißen die beiden Figuren verschieden. Liefert aber das angegebene Verfahren stets gleiche Bausteine an gleichen Stellen, so nennt man die Figuren gleich.

Seien die Figuren mit F und G bezeichnet.
Dann schreibt man im ersten Fall

F ✱ G

im zweiten Fall

$F \not\equiv G$

Die Verwendung des Zeichens $\not\equiv$, geregelt durch das obige Verfahren, legt seine Bedeutung fest.

Hier zeigt sich wiederum ein wesentlicher Zug des operativen Aufbaus:
Man weiß, worüber man redet, weil man den Gebrauch dessen, worüber man spricht, kennengelernt hat.

Das angegebene Vergleichsverfahren läßt sich symbolisieren, und zwar erzielt das eine Unabhängigkeit von den jeweilig vorliegenden Kalkülen, Figuren und Realisierungen: Aus der sprachlichen Beschreibung schält die Symbolisierung den rein instrumentellen Charakter des Verfahrens heraus.

In einer Tabelle ist die Ungleichheit bzw. Gleichheit der Bausteine festgelegt : U_0

Sind u, v Variable für beliebige Bausteine und F eine beliebige Figur, dann gilt $u\ F \not\equiv v$, denn rechts von u steht noch ein Baustein (nämlich der am weitesten links stehende von F), während rechts von v kein Baustein mehr folgt.

$u\ F \not\equiv v$: U_1

Analog ergibt sich aus dem Verfahren:

$u \not\equiv v\ F$: U_2

Weiterhin liefert das angegebene Vergleichsverfahren: Liegen mit F und G zwei verschiedene Figuren vor, dann sind auch die durch "Linksanfügen" je eines Bausteins an F bzw. G entstehenden Figuren u F bzw. v G verschieden:

$F \not\equiv G \Longrightarrow u\ F \not\equiv v\ G$: U_3

Weiterhin erhält man durch Verwendung des beschriebenen Verfahrens:
Sind u und v verschiedene Bausteine, was durch Aufsuchen in der Tabelle U_0 festzustellen ist, und F und G zwei beliebige Figuren, so sind auch die Figuren u F und v G verschieden

$$u \neq v \Longrightarrow u\ F \neq v\ G \qquad : U_4$$

Andererseits ergibt sich aus den Regeln U_0 bis U_4 das angegebene "natürliche" Verfahren zur Bestimmung der Verschiedenheit von zwei Figuren eines vorgelegten Kalküls (Baukastens, Handlungsschemas).

Es seien zwei Figuren L und M vorgelegt, die nach dem "beschreibenden" Verfahren verschieden sind: $L \neq M$
Doch ergibt sich ihre Verschiedenheit auch aus U_0 bis U_4?

Sind L und M beide Bausteine, dann läßt sich ihre Verschiedenheit aus U_0 feststellen.
Ist M ein Baustein, L aber nicht, dann liefert U_1 die Verschiedenheit von L und M:
Man wähle als v die Figur M.
U_1 lautet:
Eine Figur mit mindestens zwei Bausteinen $\neq$ einem beliebigen Baustein. Also: $L \neq M$
Ist L ein Baustein, M aber nicht, dann wähle man in U_2 für u die Figur L.
U_2 besagt:
Ein Baustein $\neq$ einer Figur mit mindestens zwei Bausteinen.
Also: $L \neq M$
Seien nun L und M zwei Figuren, die beide keine Bausteine sind.
Angenommen, in L und M stehen an der gleichen Stelle zwei verschiedene Bausteine a und b: $a \neq b$

1. Fall: Es folgen in beiden Figuren keine Bausteine mehr auf a bzw. b.
Dann läßt sich mittels U_3, indem man im ersten Schritt als F die Figur a und als G die Figur b wählt, sukzessive L und M herstellen, und es gilt: L $\not\equiv$ M

2. Fall: M enthält auf b die Bausteine $b_1 \ldots b_m$
L keinen weiteren Baustein:
In U_2 setze man für u a, für v b und für F $b_1\ b_2 \ldots b_m$.
U_2 liefert: a $\not\equiv$ b $b_1\ b_2 \ldots b_m$
U_3 ergibt: mit a als F, G als b $b_1 \ldots b_m$ sukzessive: L $\not\equiv$ M

3. Fall: L enthält auf a noch weitere Bausteine, während auf b keine mehr folgen.
Siehe hierzu den 2. Fall. Unter Verwendung von U_1 an Stelle von U_2.

4. Fall: L und M enthalten auf a bzw. b folgend noch weitere Bausteine.
U_4 liefert dann:
a "Rest von L" $\not\equiv$ b "Rest von M"
Wählt man in U_3 für F die Figur a "Rest von L" und für G die Figur b "Rest von M", so lassen sich wieder sukzessive L und M aufbauen, und man erhält: L $\not\equiv$ M

Diese Bemerkungen sind anzusehen als Plausibilitätsversuche für den "Kalkül der Ungleichheit" U_0 bis U_4 [1].

1) Das angegebene Verfahren liefert auch die Symmetrie von $\not\equiv$, d. h., unter den angegebenen Voraussetzungen ergibt sich L $\not\equiv$ M und auch M $\not\equiv$ L.

Auf die Vorführung von Beispielen kann hier verzichtet werden, weil sie auf der Hand liegen.

Das Verfahren zur Bestimmung der Gleichheit läßt sich wie folgt kalkulisieren:

$u \equiv v,\ F \equiv G \Longrightarrow u\ F \equiv v\ G$

Auf Grund der ausführlichen Erläuterungen zum Ungleichheitskalkül kann hier verzichtet werden, breit angelegte Erörterungen folgen zu lassen.

Es sei aber nochmals hingewiesen, daß beide Kalküle, sowohl der Kalkül der Ungleichheit wie auch der der Gleichheit, keine expliziten Definitionen liefern, sondern i n d u k t i v den Gebrauch des Zeichens $\neq$ bzw. $\equiv$ festlegen. Die Induktivität dieser Definitionen erfolgt aus der Zielsetzung eines operativen Aufbaus der Logik und Mathematik. Damit geht aber ein wichtiges Prinzip einer jeden Lehre, die induktive Einführung der zu verwendenden Begriffe, selbst schon in den Aufbau der reinen Wissenschaft ein und muß nicht erst aus didaktischen Gründen an sie herangetragen werden.

Mit einem Kalkül ist ein Verfahren gegeben, das die Herstellung von Figuren regelt. Das Konstruktionsverfahren einer bestimmten Figur A im Kalkül K nennt man auch, wie schon erwähnt, Ableitung von A in K und wählt hierzu die Bezeichnung $\vdash_K A$ oder, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, $\vdash A$.

Nun existieren aber in gewissen Kalkülen auch Figuren, die sich nicht ableiten lassen. So stellt die Figur * * * in K_2 ein Beispiel einer nichtableitbaren "Aussage" dar, denn sie findet sich in den Anfängen nicht, und zum anderen muß in beiden Regeln an jede schon hergestellte Figur zumindest der Grundbaustein $\square$ angefügt werden.

An den verschiedensten Kalkülen erfährt der Begriff der Ableitbarkeit bzw. Nicht-Ableitbarkeit eine Vertiefung. Auf die Angabe von weiteren Beispielen sei hier verzichtet.

Als entscheidend erweist sich die Erkenntnis beim Lernenden, daß eine Behauptung $\vdash_K A$ nur dann sinnvoll aufzustellen ist, wenn ein V e r f a h r e n , eine K o n s t r u k t i o n die Figur A innerhalb K liefert [1]. Erste tastende Versuche führen an den Begriff der Entscheidbarkeit heran:

Es liege die Ableitung einer Figur A in K vor, d. h., es gilt: $\vdash_K A$
Wird die ableitbare Figur A zu den Anfängen des Kalküls K hinzugenommen, so verändert sich die Klasse der ableitbaren Figuren nicht. Im neuen Kalkül K' sind jedoch einige Figuren "schneller" ableitbar als im Kalkül K.

Ein triviales Beispiel solch einer Figur liefert natürlich A selbst, die ja nun in K' zum Anfang gehört. Die Hinzufügung der Figur □ □ □ * □ □ * zum Anfang von K_2 läßt die vorgeführte Ableitung von
□ □ □ * □ □ * □ * im neuen Kalkül auf einen Ableitungsschritt schrumpfen. Das Hineinnehmen einer ableitbaren Figur in den Anfang verändert zwar die vorhandene Klasse der ableitbaren Figuren nicht, doch liegt aus "ökonomischen" Gründen hiermit eine Erleichterung im Ableitungsverfahren gewisser anderer Figuren vor.

Der didaktische Gewinn ist zu finden in der sich aufbauenden Erkenntnis, Ableitungsschritte auf schon "früher" geleistete zu stützen.

---

1) Die Behauptung "A ist nicht ableitbar" ist ebenfalls sinnvoll, da sie durch das beweisende Ableitungsschema von "A ist ableitbar" widerlegt werden kann.

Analoge Überlegungen, die vorher zur Ableitbarkeit von Figuren und ihrer Aufnahme in die Anfänge des Kalküls angestellt wurden, lassen sich auch auf die Regeln (die Handlungsvorschriften, die Konstruktionsanweisungen) übertragen. Genauer formuliert meint das nichts anderes als die Frage: Welche Regeln lassen sich zu einem schon vorhandenen System hinzufügen, ohne hierdurch die Klasse der ableitbaren Figuren zu erweitern?

Ein Beispiel erläutere die Fragestellung:
Nimmt man zu den Regeln R_1 und R_2 von K_2 die Regel

$$x \Rightarrow \square\, x\, \square * \square \qquad (R_3)$$

hinzu, so lassen sich vorher nichtableitbare Figuren auch unter zusätzlicher Verwendung von R_3 jetzt immer noch nicht ableiten. Die Begründung ist trivial: R_3 entsteht durch Hintereinanderausführung von R_1 und R_2.

Regeln, die keine echte Erweiterung des Kalküls bewirken, d. h. solche, die keine neuen nichtableitbaren Figuren ergeben, sollen hier in Übereinstimmung mit Lorenzen zulässige Regeln [1] genannt werden.

Bedeutung kommt auch der umgekehrten Fragestellung zu: Welche Regeln erweitern die Klasse der ableitbaren Figuren?

Hier findet sich wiederum eine enge Verwandtschaft zu den vorher untersuchten Fällen nichtableitbarer (nichtherstellbarer) Figuren (Erzeugnisse), denn aus dem Wissen der Nicht-Ableitbarkeit einer bestimmten Figur A innerhalb eines Kalküls K folgt, daß jedenfalls eine Regel, die A herzustellen gestattet, eine nichtzulässige sein muß. Solche Regeln erweitern also echt die Handlungsmögkeiten eines vorliegenden Handlungssystems.

1) Sie sollen auch nicht-erweiternde Regeln heißen.

Nimmt man zu den Regeln R_1 und R_2 von K_2 noch die folgende Regel hinzu

$$x \Longrightarrow x\,* \qquad (R_3)$$

so ist hiermit der Handlungsspielraum von K_2 echt erweitert worden. R_3 gestattet nämlich die Herstellung von * *, was vormals ja unmöglich war.

In einfachen Kalkülen z. B. in solchen, in denen nur eine endliche Anzahl Figuren erzeugt wird, läßt sich immer leicht feststellen, ob eine Regel zulässig oder nicht-zulässig ist, man hat ja hierzu nur die Figuren, die unter Benutzung der zu untersuchenden Regel entstehen, mit den ursprünglichen zu vergleichen. Liegt ein Unableitbarkeitsbeweis vor, so hat man damit gleichzeitig den Beweis der Unzulässigkeit derjenigen Regel gewonnen, mit deren Hilfe die unableitbare Figur zu einer ableitbaren wird.

Für die bisherigen Ausführungen des Weges der Logik und Mathematik unter dem Blickwinkel der operativen Fundierung, die damit aber auch in ihrer didaktischen Verwendung parallel zur rein wissenschaftlichen Begründung einhergehen, kann auf die ausführliche Beispielangabe verzichtet werden, da hierfür ein reichliches Angebot schon zur Verfügung steht, wenn auch ihre Benutzung bisher weitgehend aus anderen Zielen heraus geschah, zum anderen würde der allgemeine Charakter dieser Arbeit hierdurch verlassen [1].

Die bisherigen und folgenden protologischen Überlegungen sind dem Lernenden weitgehend schon geläufig, doch kommt es darauf an, sie ihm bewußt zu machen, da sie das Fundament der Logik bilden. Dieser Bewußtwerdungsprozeß ge-

1) Ich möchte mir allerdings vorbehalten, an anderer Stelle dies nachzuholen.

schieht durch Handlungen, die selbst aber die Basis der Logik und Mathematik bilden.

Handlungen konstituieren hier sowohl den Lernprozeß wie auch das zu Lernende.

Im folgenden seien noch kurz die fünf wichtigen Prinzipien zur Gewinnung von zulässigen Regeln dargestellt [1].

Es werde ausgegangen vom ersten angeführten Beispiel einer geregelten Handlung, dem Kalkül K_1:

Material:	o	
Variable:	a	
Anfang:	o	(A)
Regel:	a ⟹ a o	(R)

K_1' laute:

Material:	o	
Variable:	a	
Anfang:	o	(A)
	o o o	(A')
Regel:	a ⟹ a o	(R)

Liegt mit K_1' eine echte Erweiterung von K_1 vor? Sicherlich nicht; zur V e r g e w i s s e r u n g schreibe man einen Handlungsablauf (Ableitung), in dem A' auftritt, hin:

---

1) Siehe hierzu P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Kapitel Protologik

.
.
.
m. Schritt o o o A'
.
.
.

Im m. Schritt komme A' zum ersten Male vor. A', d. h. die Figur o o o, läßt sich aber in K_1 ableiten:

o	A
o o	R(o)
o o o	R(oo)

Der m. Schritt der obigen Ableitung darf also durch die Ableitung von o o o ersetzt werden, d. h., eine Ableitung in K_1' kann auch durch eine solche in K_1' vollzogen werden.

Dieses exemplarisch vorgeführte E l i m i n a t i o n s v e r f a h r e n , das zur Grundlage von Zulässigkeitsaussagen gemacht wird, liefert damit die Sicherheit für die Behauptung, K_1' sei keine echte Erweiterung von K_1.

Das Eliminationsverfahren ist nichts anderes, als das was Kinder so ausdrücken:
"Was du kannst, kann ich (mit meinen Mitteln) auch!"
Die Behauptung wird dann, genau wie hier, durch Vormachen "bewiesen".

Es nützt im Bereich einer operativen Grundlegung und ihrer Didaktik nichts, irgendwelche Aussagen zu postulieren, d. h. also Axiome aufzustellen, da sie ja erst in Handlungen ihre Berechtigung erhalten. Das Einbringen

von Zulässigkeitsbehauptungen in einen Kalkül muß sich stets der Gefahr einer möglichen Widerlegung gegenwärtig sein.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:
Jemand stellt etwa das folgende Handlungsschema auf [1]:

Bausteine:	□, *	
Variable:	x	
Anfänge:	□	(S_1)
	*	(S_2)
Regeln:	x ⟹ x □ *	(R_1)
	x ⟹ □ x □	(R_2)

Ist nun die Regel

x □ * ⟹ x (R_3)

zulässig?

Die Frage läßt sich im didaktischen Gewand einer s p i e l t h e o r e t i s c h e n Formulierung ausdrücken: Gibt es eine Strategie, die stets das Auftreten der Regel R_3 durch alleinige Verwendung der Regeln R_1 und R_2 ausschaltet? Zur Beantwortung der Frage betrachtet man einen Ableitungsprozeß, in dem R_3 als Handlungsvorschrift vorkommt, genauer diejenige Stelle, an der R_3 zum ersten Mal erscheint. Das Ziel besteht nun darin, R_3 durch R_1 oder R_2 zu eliminieren.

1) Das ist der schon vorgestellte Kalkül K_2, auf den aus Bequemlichkeitsgründen zurückgegriffen wird.

(Anfänge)

.
.
.

1. Schritt a □ *

.
.
.

m. Schritt a R_3(a□*)

Im 1. Schritt tritt die Figur a □ * auf, aus der im m. Schritt mittels R_3 die Figur a hergestellt wurde. Doch auch die Figur a □ * muß sich aus den gegebenen Spielmarken □ und * zusammensetzen. Da R_3 aber im m. Schritt erstmalig erscheint, kann diese Regel nicht mehr auftreten. a □ * kann durch R_1 erzeugt werden:

a ⟹ a □ *

Das Ableitungsverfahren darf also auch wie folgt geschrieben werden:

(Anfänge)

.
.
.

k. Schritt a

.
.
.

1. Schritt a □ *

.
.
.

m. Schritt a

Die Figur a läßt sich damit ohne Verwendung der Regel R_3

aufbauen, man betrachte hierzu nur den Teil der Ableitung von den Anfängen bis zum k. Schritt: Die Regel R_3 ist eliminiert worden. Das angegebene Verfahren läßt sich natürlich an jeder Stelle verwenden, die R_3 enthält.

Die erarbeitete Strategie besagt jedoch nichts anderes als die Zulässigkeit von R_3. Mit R_3 gewinnt man sozusagen keine neue Technik, man kann genau soviel wie vorher ohne ihre Benutzung. Das an einem Beispiel aufgezeigte Vorgehen bedient sich keinerlei logischen Regeln. Das "Beweisverfahren" besteht aus dem Vergleich zweier Kalküle, dem ursprünglichen und dem durch eine Regel "erweiterten", und dies alles mit der Absicht, $\vdash_T R$ nachzuweisen.

Dem Nachweisen, Beweisen ist hiermit aber eine operative Deutung gegeben und damit aber zugleich ihre Erlernbarkeit auf einfachste menschliche Fähigkeiten, den Möglichkeiten, geregelte Handlungen ausüben zu können, reduziert. Die für eine Didaktik so wichtige Beachtung der fachgerechten als auch dem Lernenden angepaßten Komponente findet sich in der Sinngebung des Nachweisens [1] in der Weise, daß diesem Begriff eine in bestimmten Handlungen aufgehende Bedeutung eigen ist. Der Lernende wird durch Handlungen an diesen Begriff herangeführt und, indem er diese Handlungen selbst ausführt, lernt er seine Bedeutung kennen, die ja in nichts anderem besteht als in eben dieser Praxis.

Durch Praxis lernt er die in eben dieser Praxis ihre Bedeutung habenden Begriffe der operativen Logik und Mathematik.

---

1) Dieser Begriff erfährt durch weitere Ausführungen noch eine eingehendere Vertiefung.

In dem vorher angegebenen Beispiel konnte die "neue" Regel durch Zwischenschalten der "alten" Regeln innerhalb des Kalküls eliminiert werden. Lorenzen nennt dieses Verfahren auch Deduktionsprinzip. In dem Wort "Prinzip" drückt sich jene Allgemeinheit aus, die sie für alle Kalküle zutreffen läßt.

Ein weiteres Beispiel zum vorgeführten Eliminationsverfahren soll sich nun anschließen; in der allgemeinen Methode des zu behandelnden speziellen Falles kommt wiederum eine Aussage von der Allgemeinheit des Deduktionsprinzips hervor. Das gewählte Beispiel ist, wie schon die übrigen früher angeführten, so gehalten, daß nicht auf eine Beschreibung einer konkreten Realisierung eingegangen wird. Dies erweist sich wegen der schon bekannten Fülle von Regelspielen als überflüssig und kann außerdem von jedem Lehrenden leicht selbst eingebracht werden [1].

Das Beispiel habe die folgende Gestalt:

K $*, \square$

x

$\square$ (A)

$x \Longrightarrow \square * x$ (R_1)

$x \Longrightarrow \square\ x\ \square$ (R_2)

In dieser Vorschrift geregelten Handelns soll nun noch die Regel

$x \Longrightarrow x\ \square\ \square$ (R_3)

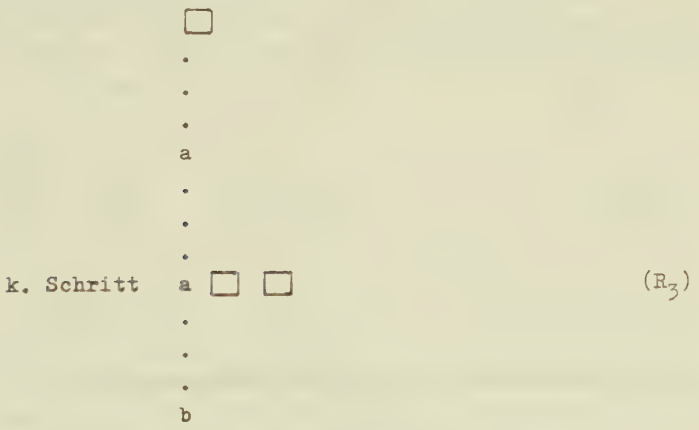
hinzukommen. Ist R_3 zulässig?

Es ist an dieser Stelle notwendig, kurz in das Gedächtnis zurückzurufen, inwieweit die operative Fundierung

1) Man denke z. B. im folgenden an eine spieltheoretische Behandlung des Problems.

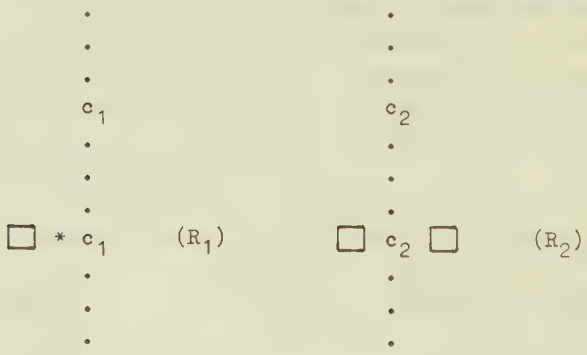
von einer sonstigen abweicht:
Verkürzt formuliert, meint dies nichts anderes, als daß nur von Regeln in Kalkülen die Rede ist und eben nicht von Aussagen, die wahr oder falsch sind.

Wie schon im vorigen Beispiel sucht man innerhalb der Ableitung einer Figur, d. h. also z. B. innerhalb des Konstruktionsprozesses einer bestimmten Figur oder innerhalb des Zugverlaufs zur Erstellung einer bestimmten spieltheoretischen Situation, genau den Schritt auf, mit dem zum erstenmal die neue Regel R_4 in den Ableitungsvorgang eindringt:

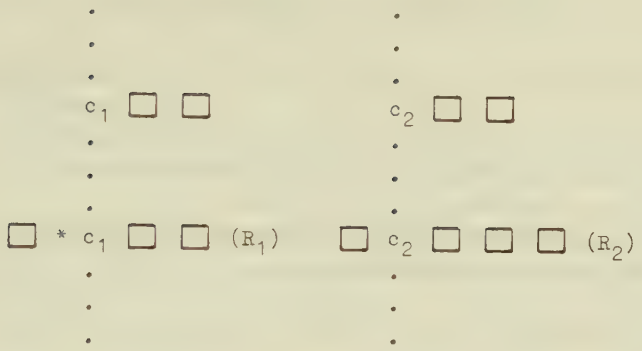


b ist eine beliebige Figur, in deren Ableitung R_4 vorkommt.
Um zu zeigen, auf welche Weise R_4 eliminiert werden kann, führt man den folgenden Vergleich zweier Ableitungen (innerhalb K) durch:

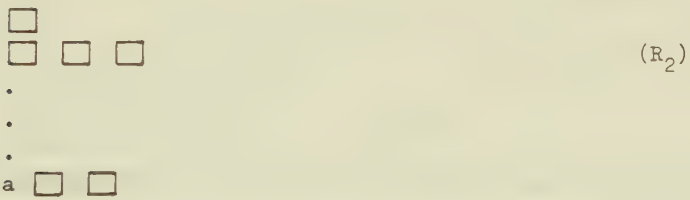
In (1) kann nun aber nicht mehr die Regel R_3 auftreten, da sie ja erst an der k. Stelle zum erstenmal Verwendung findet.
Das mögliche Auftreten von R_1 und R_2 in (1) ist zur Verdeutlichung getrennt aufgeschrieben:



Hiermit kann man die folgende Umformung vornehmen:



Aus jeder Figur A wurde also eine Figur A □ □. Beachtet man nun noch, daß sich □ □ □ unter Verwendung von R_2 aus dem Anfang □ herstellen läßt, dann ist R_3 eliminierbar:



In dieser Ableitung taucht R_3 nirgends mehr auf, d. h. die Ableitung (1) für a ist in eine solche für a □ □ in K umgestaltet worden. Weiterhin darf dieses Verfahren aber an jeder Stelle, wo R_3 auftritt, benutzt werden: R_3 ist zulässig.

Das exemplarisch vorgeführte Verfahren trägt den Namen Induktionsprinzip.

In allgemeiner Formulierung lautet die Methode:

(i) $A(\square)$; $A(a) \Longrightarrow A(\square * a)$; $A(a) \Longrightarrow A(\square\ a\ \square) \vdash_K A(s)$

A(x) meint irgendeine Aussageform, in der x vorkommt. Die allgemeine Schreibweise von (i) hat die Form

A_1; ...; A_m; R_1; ...; $R_k \vdash_K A$

d. h., aus den Anfängen A_1, ..., A_m und den Regeln R_1, ..., R_k läßt sich A in K ableiten.

A_1; ...; A_m; R_1; ...; $R_k \vdash_K R$

d. h., die Regel R ist in K mit Hilfe von A_1, ..., A_m und R_1, ..., R_k ableitbar.

Das angegebene Induktionsprinzip enthält die in der Arithmetik auftretende Aussage gleichen Namens.

Gegeben sei:

K' Variable: a
Anfang: |
a ⟹ a | (R)

Bezeichnet man mit n allgemein eine in K' ableitbare Figur, so gilt nach der im Induktionsprinzip angegebenen Methode

$A(|)$; $A(a) \Longrightarrow A(a\ |) \vdash_K A(n)$

Zur Aufstellung eines weiteren wichtigen Prinzips - des sogenannten Inversionsprinzips - gehe man etwa von dem Kalkül zur Erzeugung der natürlichen Zahlen K' aus:

Variable: x
Anfang: |
x ⟹ x | (R)

Zusätzlich betrachte man den folgenden Kalkül $K_=$:

Material: $|, =$
Variable: x, y
Anfang: $| = |$
$x = y \Longrightarrow x\,| = y\,|$ (R)

$K_=$ kann als operative Definition der Gleichheit der natürlichen Zahlen angesehen werden, doch wird hierauf noch später genauer eingegangen.
Aus den beiden Kalkülen bilde man den neuen Kalkül $K_='$:

Material: $|, =$
Variable: x, y
Anfänge: $|$
$| = |$
$x \Longrightarrow x\,|$ (R_1)
$x = y \Longrightarrow x\,| = y\,|$ (R_2)

In diesem Kalkül ist aber R_3
$x\,| = y\,| \Longrightarrow x = y$
ableitbar, d. h., die "Umkehrung", die "Inversion" der Regel R_3 gilt als zulassig in $K_='$. Wenn in $K_='$ aus der Figur $x = y$ die Figur $x\,| = y\,|$ hergestellt werden kann, dann auch aus $x\,| = y\,|$ die Figur $x = y$.

Die Zulassigkeit von R_3 ergibt sich mit folgender Überlegung [1]: Wie schon in den vorigen Beispielen sucht man die erste Stelle, an der die Regel R_3 innerhalb einer Ableitung erscheint.

1) R_3 ist sogar zulässig in $K_=$.

.
.
.

m. Schritt $a\,|\,=\,b\,|$

.
.
.

n. Schritt $a = b$ $R_3(a|=b|)$

.
.
.

Weiterhin bleibt nun noch die Frage nach der Ableitung von $a\,|\,=\,b\,|$. Hierzu kann jedoch nur die Regel R_1 verwandt worden sein.

.
.
.

k. Schritt $a = b$

.
.
.

m. Schritt $a\,|\,=\,b\,|$

.
.
.

Hiernach liegt schon eine Ableitung von $a = b$ ohne Benutzung von R_3 vor. Damit ist aber die Zulässigkeit von R_3 gezeigt, wenn man beachtet, daß R_3 mit der vorgeführ-

ten Methode bei jedem Vorkommen umgangen werden kann [1].

Die schon behandelte induktive Definition der Gleichheit führt zu einem weiteren Prinzip zur Gewinnung von zulässigen Regeln. Der Lernende erkennt an genügend oft vollzogenen geregelten Handlungsabläufen, daß es für den Kalkülbegriff nicht auf die jeweilige individuelle Realisierung von Figuren ankommt, es ist vielmehr erlaubt, von einer Figur A auf eine andere B überzugehen, wenn ihre Gleichheit vorliegt:

$$\vdash A \equiv B,\ A \Longrightarrow B$$

Diese Zulässigkeitsaussage nennt Lorenzen Gleichheitsprinzip [2].

Hieran anschließend soll noch ein kurzer Einstieg in das sogenannte Unableitbarkeitsprinzip vorgelegt werden, dazu geht man wiederum aus von einem beliebigen Kalkül K:

Material: □, ⊕
Variable: x
Anfänge: □ (A_1)
□ ⊕ (A_2)
x ⟹ x □ ⊕ ⊕ □ (R_1)
x ⟹ □ x (R_2)
x ⟹ □ x ⊕ (R_3)

1) Die allgemeine Formulierung des Inversionsprinzips, die sich in P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, 1955, S. 30 findet, wurde von H. Hermes, Zum Inversionsprinzip der operativen Logik, in: Constructivity in Mathematics, Hrsg. A. Heyting, Amsterdam 1959, als unkorrekt nachgewiesen. Die Diskussion der Darstellung von Hermes würde aber den hier beabsichtigten Rahmen sprengen.
2) Siehe P. Lorenzen, a. a. O., S. 34

In K ist die Figur ⊕ ⊕ nicht ableitbar [1].

Der Lernende schafft sich die hierzu notwendige Gewißheit durch zwei Feststellungen:
1. Kommt die Figur ⊕ ⊕ nicht unter den Anfängen vor.
2. Jede der drei Regeln führt auf eine Figur, in der die Grundfigur □ auftritt.

Die Figur ⊕ ⊕ kann also nirgendwo auftreten. Durch Induktion überzeugt man sich also, daß ⊕ ⊕ nicht unter den Anfängen vorkommt und weiterhin auch nicht an der zweiten Stelle irgendeiner Ableitung erscheint, da ja R_1, R_2 oder R_3 verwendet werden müßte. Keine Ableitung aus n Zeilen führt auf ⊕ ⊕, aber auch damit keine aus n+1 Zeilen.

Bildet man mit Hilfe von ⊕ ⊕ die folgende Regel in K, ⊕ ⊕ ==> B, worin also ⊕ ⊕ unableitbar ist und B eine beliebige ableitbare oder nicht-ableitbare Figur sein soll, dann ist diese Regel zulässig, denn sie kommt in keiner Ableitung vor.

Allgemein ist eine Regel (Unableitbarkeitsprinzip)

A ==> B (R)

mit A als unableitbare und B als ableitbare oder nicht-ableitbare Figur stets zulässig, da sie in keiner Ableitung angewendet wird und damit "sich selbst elimiriert". Indirekt vorgehend, schafft man sich umgangssprachlich sofort diese Gewißheit.

---

1) Dazu müßte man zeigen, daß für jede in K ableitbare Figur a im Kalkül der Ungleichheit und Gleichheit zutrifft: ⊢ a ≢ ⊕ ⊕
Lorenzen gibt auf S. 35 ein Beispiel solch eines Nachweises, der hier, wo es nur um eine Einführung geht, wegen seiner Breite der Argumentationsweise nicht zu benutzen ist.

Ohne Benutzung der Negation liefert ein induktives Vorgehen über alle möglichen Ableitungen die gewünschte Sicherheit. In der ersten Zeile einer beliebig gewählten Ableitung kommt R nicht vor. Tritt R in den aus n Zeilen bestehenden Ableitungen nicht auf, dann aber auch nicht in einer solchen, die aus n+1 Zeilen besteht. Der in geregelten Handlungen nun Geübte erkennt nämlich, daß die Anwendung einer beliebigen Regel in der n+1. Zeile stets ihren Ausgang nimmt von Figuren, die in den ersten n Zeilen schon hergestellt wurden, d. h. von solchen, für die ⊭ A zutrifft. Damit kann R in der n-ten Zeile nicht Anwendung finden.

"Dieses Prinzip entspricht in der traditionellen Logik dem Grundsatz, daß eine falsche Aussage jede beliebige Aussage impliziert: ex falso quodlibet sequitur. Es ist oft betont worden, daß dieser Grundsatz dem 'inhaltlichen Denken' nicht adäquat sei. Im Gegensatz dazu sehen wir aber, daß dieser Grundsatz vom operativen Begriff der Zulässigkeit aus voll zu rechtfertigen ist" [1].

Aus den fünf Prinzipien

(1) Deduktionsprinzip
(2) Induktionsprinzip
(3) Inversionsprinzip
(4) Gleichheitsprinzip
(5) Unableitbarkeitsprinzip

läßt sich aber nun die operative Logik und Mathematik aufbauen.

Ein schwieriges didaktisches Problem [2], das darin besteht, zu einer axiomatischen Theorie der Logik hinzuführen und einsichtig zu machen, daß eben jene axiomati-

1) P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, S. 37
2) Selbstverständlich ist dies auch ein Grundlagenproblem.

sche Formalisierung logisches Schließen erfaßt, obwohl doch jede axiomatische Theorie Logik voraussetzt, erfährt durch den operativen Aufbau eine Lösung dieses Zirkels.

Kalküle und die genannten Prinzipien können logikfrei eingeübt werden.

Die Lehre eines operativen Aufbaus der Logik und Mathematik meint nichts anderes, als daß eben jene Lehre jederzeit durch einen rein praktischen Unterricht ersetzt werden kann, in dem geregeltes Handeln an einem hinreichend großen Beispielmaterial eingeübt wird, und daß die praktische Übung nicht nur aus didaktischen Gründen verwandt wird, sondern Konstitutivum der (operativen) Wissenschaft selbst ist.

In genau dieser Deutung, die Protologik - ihre praktische Einübung - bilde die Grundlage der axiomatischen Theorien von Logik und Mathematik, kommt ihr ausgezeichneter didaktischer Wert ans Licht.

g) Der Übergang von der Protologik zur formalen Logik

Nachdem nun in einem ersten Teil die protologischen Untersuchungen in ihren Kernpunkten hervorgehoben und schließlich auch allgemeine Prinzipien formuliert wurden, soll nun im weiteren auf das Verhältnis von Protologik und Logik weiter eingegangen werden, d. h., es ist das lineare didaktische Vorgehen, das in geregelten Handlungen (z. B. Regelspielen) seinen Anfang nimmt und schließlich zu Logikkalkülen führt, weiter auszubauen.

Von der Protologik aus gelangt man zur Logik, wenn solche

Zulässigkeiten untersucht werden, die für beliebige Kalküle gelten. In traditioneller philosophischer Sprache ausgedrückt, heißt dies: Logische Regeln sind solche, die unabhängig vom "Stoff" der einzelnen Kalküle bestehen. L o g i s c h e Regeln sind in a l l e n Kalkülen z u l ä s s i g . Regeln, die in jedem beliebigen Kalkül zulässig sind, heißen im folgenden allgemein zulässig.

Hat im vorigen der Lernende erkannt (und zwar durch Handlungen, die ja selbst Gegenstand der Untersuchungen waren und sind), wie die Zulässigkeit jeweils kalkülgebundener Regeln durch Verfahren zu sichern bzw. zu widerlegen ist, soll er nun an allgemein zulässige Regeln herangeführt werden.

Dazu liege ein beliebiger Kalkül K vor. Die Regeln in K haben die Form

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \Longrightarrow A$$

Sprachlich läßt sie sich, wie ja mittlerweile bekannt ist, z. b. wie folgt ausdrücken:
"Wenn die Figuren $A_1, A_2, \ldots, A_m$ hergestellt sind, stelle A her" oder "von $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gehe über zu A".
Ersichtlich führt eine einfache Fallunterscheidung auf eine allgemein zulässige Regel:

1. Fall: A ist verschieden zu $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Der Verschiedenheit wurde vorher eine kalkülgemäße Deutung gegeben. In diesem Fall ist die angegebene Regel selbstverständlich nicht für jeden beliebigen Kalkül zulässig.

2. Fall: A stimmt mit einem A_k aus $A_1, A_2, \ldots, A_m$ überein, d. h., die Regel geht über in:
R_1 $A_1, A_2, \ldots, A_m \Longrightarrow A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$

Diese Regel bildet eine allgemein zulässige Handlungsanweisung. Man versichert sich dessen durch die vorher ausführlich behandelten Eliminationsverfahren. Dazu sei ein Ausschnitt einer Ableitung aufgeschrieben, in der die Regel R vorkommt:

.
.
.
n_1. Schritt A_1
.
.
.
n_m. Schritt A_m
.
.
.
n. Schritt A_k
.
.
.

Der n. Schritt liefert unter Verwendung der n_1., n_2., ..., n_m. Schritte die Aussage (Figur) A_k. A_k erscheint aber schon an der n_k. Stelle. Die n. Zeile kann also gestrichen werden unter Verweis auf die n_k. Stelle.

Das vorgeführte Verfahren zum Nachweis der Zulässigkeit der Regel R_1: $A_1, \ldots, A_m \Longrightarrow A_k$ (k = 1, ..., m) macht aber an keiner Stelle von der speziellen Eigenart (Grundfiguren, Anfänge, Variable, Regeln) eines bestimmten Kalküls Gebrauch: R_1 gilt in jedem Kalkül, genauer: R_1 ist allgemein zulässig.
R_1 heiße die Regel der allgemeinen Reflexivität.

An genügend vielen Beispielen muß dem Lernenden einsichtig gemacht werden, daß in dem Nachweis einer allgemeinen Zulässigkeit keine Besonderheit eines speziellen Kalküls vorausgesetzt werden darf. Liegen etwa die Regeln R_1, R_2, ..., R_n, R' vor und soll hieraus die allgemeine Zulässigkeit einer Regel R_1, R_2, ..., $R_n \vdash$ R' nachzuweisen sein, dann muß das als Methode vorgeschlagene Eliminationsverfahren in allen Kalkülen Verwendung finden können.

Als nächstes wird hierzu die Allgemeinzulässigkeit der Regel

R_2 $\quad A \Longrightarrow B;\ B \Longrightarrow C \vdash A \Longrightarrow C$

bewiesen. Sie trägt den Namen Regel der Transitivität. Jeder logisch Geschulte deutet $\Longrightarrow$ als logische Implikation; R_2 ergibt sich in ihrer Zulässigkeit dann aus dem Bestehen der Transitivität der logischen Implikation: Wenn A B impliziert und B C, dann impliziert A auch C. Nun darf aber der vorgelegte Aufbau noch keine Logik verwenden, der Lernende soll ja vielmehr logisches Schließen erst, gestützt auf dem menschlichen Vermögen, geregelt handeln zu können, sich erarbeiten. Zum Beweis der Zulässigkeit der Transisitivitätsregel muß deshalb wiederum das zugehörige Eliminationsverfahren gesucht werden. Bevor dies geschieht, sei die zu untersuchende Regel interpretiert. Enthält ein beliebiger Kalkül $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$, dann ist in ihm $A \Longrightarrow C$ zulässig. Oder etwas anders gewendet: Fügt man zu einem beliebigen K die beiden Regeln $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$ hinzu, dann ist in dem erweiterten Kalkül K_e die Zulässigkeit von $A \Longrightarrow C$ zu beweisen. Eine beliebige Ableitung in K_e, die $A \Longrightarrow C$ benutzt, hat das folgende Aussehen:

.
.
.
m. Schritt A
.
.
.
n. Schritt C $A \Longrightarrow C$
.
.
.

Die Regel $A \Longrightarrow C$ kann hierin eliminiert werden, wenn der n. Schritt ersetzt wird durch

n. Schritt B $A \Longrightarrow B$
n+1. Schritt C $B \Longrightarrow C$

Damit ist aber eine Ableitung in K' gewonnen, die Regel $A \Longrightarrow C$ wurde durch die beiden Regeln $A \Longrightarrow B$ und $A \Longrightarrow C$ ausgedrückt.

Das verwandte Eliminationsverfahren zeigt deutlich den ökonomischen Nutzen der Transitivitätsregel: Zwei Handlungsschritte (Denkschritte) der angegebenen Form sind durch einen ersetzt worden.

Zur vorgeführten Transitivitätsregel gibt es nun eine naheliegende Verallgemeinerung:

$A_1, \ldots, A_m \Longrightarrow B_1; \ldots; A_1, \ldots, A_m \Longrightarrow B_n;$
$B_1, \ldots, B_n \Longrightarrow B \vdash A_1, \ldots, A_m \Longrightarrow B$

Auf die Angabe des Eliminationsverfahrens kann verzichtet werden, da es sich eng an den speziellen Fall anlehnt.

Die angegebene Transitivitätsregel gestattet also, aus der Zulässigkeit einiger Regeln auf die Zulässigkeit einer neuen Regel überzugehen. Außerdem ist in allen Kalkülen die Reflexivitätsregel zulässig.

Diese Auffassung führt dann zur Aufstellung eines Meta-Kalküls, dessen Figuren zulässige Regeln des "Grundkalküls" der Form $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow A$ sind. Die Transitivitätsregel interpretiert man als Regel im Meta-Kalkül in der Weise, daß "wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ vorliegt, zu $A \Rightarrow C$ überzugehen ist". Man schreibt dann:

$$A \Rightarrow B;\ B \Rightarrow C \Rightarrow\!\!\!\Rightarrow A \Rightarrow C$$

Das Zeichen $\Rightarrow\!\!\!\Rightarrow$ zeigt den Übergang an von den beiden Figuren $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ zur Figur $A \Rightarrow C$ des Meta-Kalküls. Meta-Kalküle haben den Vorteil, daß man zulässige Regeln des Grundkalküls unter Umständen im Meta-Kalkül ableiten kann und damit nicht immer auf Eliminationsverfahren zurückgegriffen werden muß. Auf ein tieferes Eingehen dieses Ansatzes sei an dieser Stelle jedoch verzichtet [1].

Weiter gelten noch folgende Meta-Meta-Regeln:

Regel der Importation:

$$A, B \Rightarrow C \Rightarrow\!\!\!\Rightarrow A \Rightarrow\!\!\!\Rightarrow B \Rightarrow C \qquad (R_i)$$

Regel der Exportation:

$$A \Rightarrow\!\!\!\Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow\!\!\!\Rightarrow A, B \Rightarrow C \qquad (R_e)$$

R_e und R_i sind jeweils Umkehrungen der anderen. R_i lautet ausgesprochen für den Grundkalkül: "Wenn in einem Kalkül die Regel $A, B \Rightarrow C$ vorliegt, dann ist es zulässig, bei Vorliegen von A auf die Regel $B \Rightarrow C$ überzugehen." R_e drückt sich in Worten entsprechend umgekehrt aus.

Zum Beweis von R_i hat man die Zulässigkeit von

1) Man vergleiche P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, S. 42 ff.

$A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$ in einem Meta-Kalkül zum beliebigen Kalkül K, in den $A, B \Longrightarrow C$ als zulässig aufgenommen wurde, zu zeigen. $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$ bezeichnet ja eine Regel des Meta-Kalküls, die es gestattet, von der Figur A zur "Figur" $B \Longrightarrow C$ überzugehen. $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$ trete in einer beliebigen Ableitung des Meta-Kalküls auf.

Meta-Kalkül:

.
.
.
k. A
.
.
.
k. $\Rightarrow$ m. $B \Longrightarrow C$
.
.
.

Nun ist aber die Regel $A, B \Longrightarrow C$ zulässig:

Kalkül:

.
.
.
p. A
.
.
.
q. B
.
.
.
p. q. $\Rightarrow$ r. C
.
.
.

Diese zulässige Ableitung heißt aber auch für den Meta-Kalkül: Die Figuren A und B $\Longrightarrow$ C sind im Kalkül ableitbar; also folgt aus der Reflexivitätsregel für den Meta-Kalkül:

$$A;\ B \Longrightarrow C \Longrightarrow B \Longrightarrow C$$

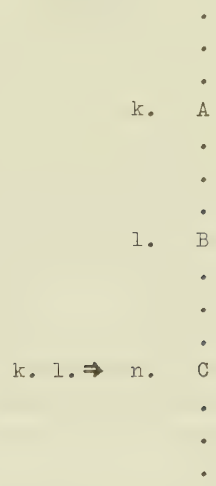
Man ersetzt demnach die Ableitung im Meta-Kalkül durch:

.
.
.
k. A
.
.
.
m. A; B $\Longrightarrow$ C
m+1. B $\Longrightarrow$ C
.
.
.

d. h., die Regel der Importation ist durch Handlungen in einem Kalkül als zulässig nachgewiesen.

Die geforderte Zulässigkeit kann aber auch durch alleinige Betrachtungen im Grundkalkül aufgezeigt werden, doch sei dies hier übergangen. Dieser Weg bietet sich dann an, wenn die Aufnahme des Begriffs des Meta-Kalküls und seiner Iterationen durch den Lehrenden allzu große Schwierigkeiten bereitet. Man beachte hierzu, daß ein Meta-Kalkül selbstverständlich wiederum ein Kalkül darstellt, doch setzen sich seine Grundbausteine aus Figuren und Regeln des Grundkalküls zusammen. Ein Meta-Kalkül macht das geregelte Handeln eines Kalküls selbst wieder zum Gegenstand geregelter Handlungen; in der Einsicht dieses Sachverhaltes können aber Schwierigkeiten auftreten.

Doch fehlt noch der Nachweis der Exportationsregel: Dazu sei ein Kalkül durch Hinzunahme der Regel A, B ==> C erweitert. Der Lernende weiß längst, daß es nun darum geht, in einer Ableitung, welche die Regel A, B ==> C enthält, diese zu eliminieren: Im Kalkül lassen sich also unter Hinzunahme der Regel nicht mehr Figuren ableiten wie ohne ihre Verwendung.



Hierin ist aber A ableitbar, also folgt aus der Zulässigkeit der Meta-Regel A ⟹ B ==> C die Zulässigkeit von B ==> C, d. h., die angegebene Ableitung läßt sich ersetzen durch:

.
.
.
k. A
.
.
.
l. B
.
.
.
l. ⇒ n. C
.
.
.

Die Figur C resultiert aus der alleinigen Anwendung von B durch die zulässige Regel B ⟹ C.

Mit dem hier an einfachen Spezialfällen aufgezeigten Verfahren zum Nachweis von R_i und R_e lassen sich aber auch die von Lorenzen [1] angegebenen Verallgemeinerungen sichern:

$$A_1; \ldots; A_m \Rightarrow A_{m+1}, \ldots, A_n \Longrightarrow A \Rightarrow$$
$$(R_i) \qquad A_1; \ldots; A_{m-1} \Rightarrow A_m, \ldots, A_n \Longrightarrow A$$

$$A_1; \ldots; A_{m-1} \Rightarrow A_m, \ldots, A_n \Longrightarrow A \Rightarrow$$
$$(R_e) \qquad A_1; \ldots; A_m \Rightarrow A_{m+1}, \ldots, A_n \Longrightarrow A$$

Die Regeln der Reflexivität, Transitivität, Importation und Exportation bilden den K a l k ü l d e r K o n s e q u e n z l o g i k . Der Lernende errichtet ihn auf der für ihn vorhandenen Grundfähigkeit des geregelten Handelns.

1) P. Lorenzen, a. a. O., S. 46

Lorenzen bemerkt [1], daß die Klasse der ableitbaren Aussagen des Konsequenzenkalküls übereinstimmt mit der Klasse der ableitbaren Aussagen im "Kalkül der positiven Implikationslogik", der vom Intuitionismus erstellt wurde. Diese Andeutung ist jedoch von ihm dort nicht näher expliziert, doch kommt gerade diesen zu leistenden Ausführungen besondere Wichtigkeit zu, da sie den hier dargelegten, didaktisch so relevanten operativen Ansatz und seine Ergebnisse mit auf anderen Wegen gefundenen logischen Kalkülen verbindet.

Der hier breit dargelegte operative Ansatz Lorenzens mit seinen Folgerungen kann also zur Interpretation bestehender Logiksysteme benutzt werden. Hierin liegt unter anderem seine große didaktische Bedeutung.

Die aufgestellte These ist im folgenden einzulösen. Hierzu deutet man die Zulässigkeit für einen Kalkül K (in Zeichen: $\vdash_K$) als operative Implikation (in Zeichen: $\prec_K$), genauer meint das: Hat man eine Zulässigkeit der Form $\vdash_K A \Longrightarrow B$, so wird hierdurch $A \prec_K B$ definiert. $A \prec_K B$ liest man: "A impliziert operativ B bezüglich eines Kalküls K".

Gilt die Zulässigkeit für jeden Kalkül K, d. h., liegt Allgemeinzulässigkeit vor, dann soll - so definiere man - die zugehörige operative Implikation logische Implikation heißen. Der Index K wird dann weggelassen.
Dann ergibt sich aus der Reflexivitätsregel die folgende Grundimplikation:

(I) $\quad A_1, A_2, \ldots, A_n \prec A_i \quad (i = 1, \ldots, n)$

Die Transitivitätsregel läßt sich nun wie folgt lesen:

1) Siehe hierzu P. Lorenzen, a. a. O., S. 48

"wenn A $\prec$ B und B $\prec$ C, dann A $\prec$ C", d. h., sie gestattet, aus logischen Implikationen weitere logische Implikationen abzuleiten. Zur Mitteilung dieser Regel sei das Doppelkomma ,, und der Doppelpfeil der Form $\Longrightarrow$ verwendet.
Die Transitivitätsregel lautet dann:

(II) $A \prec B \,,, B \prec C \Longrightarrow A \prec C$

Für das Weitere spielt auch noch die für die klassische Logik so wichtige Subjunktion (Zeichen: $\rightarrow$ (Hilbert), $\supset$ (Russell), $\vdash$ (Frege), auch Lorenzen) eine besondere Rolle. Man beachte die Festsetzung in der klassischen formalen Logik: A impliziert faktisch B genau dann, wenn $A \rightarrow B$ faktisch wahr ist. Hierbei kann $A \rightarrow B$ durch $\bar{A} \vee B$ definiert werden, also ist $A \rightarrow B$ genau dann faktisch wahr, wenn A faktisch falsch ist oder B faktisch wahr ist. Im Hinblick hierauf setzt man nun fest [1], daß der Regel $A \Longrightarrow B$ eine Deutung als Subjunktion zu geben ist und schreibt dann $A \rightarrow B$. Damit ist also in den Transportationsregeln die folgende Interpretation der verwendeten Zeichen nahegelegt: $\Longrightarrow$ wird als Mitteilungsregel gedeutet: $\Longrightarrow$, für $\Longrightarrow$ schreibt man nach den obigen Erörterungen auch $\prec$.

Die Transportationsregeln haben somit die Form:
"wenn A, B $\prec$ C, dann A $\prec$ B $\rightarrow$ C" und
"wenn A $\prec$ B $\rightarrow$ C, dann A, B $\prec$ C"
oder vollständig in Zeichen niedergeschrieben:
(III) $A, B \prec C \Longrightarrow A \prec B \rightarrow C$
(IV) $A \prec B \rightarrow C \Longrightarrow A, B \prec C$

1) Man beachte hierzu auch den klassisch logischen Zusammenhang zwischen faktischer und logischer Implikation und hinzukommend die vorher angegebene Deutung der operativen Implikation, die der faktischen Implikation (in der klassischen Logik) entspricht.

Mit (I) bis (IV) ist aber genau der Kalkül der "positiven Implikationslogik" gewonnen.

An dieser Stelle wird wiederum die Tragfähigkeit der operativen Methode einsichtig. Der vorgelegte Kalkül wurde auf der für jeden Lernenden vorhandenen Fähigkeit, geregelter Operationen mächtig zu sein, errichtet.

Um noch einige weitere logische Partikel (Junktoren) einzuführen, wird zunächst der Begriff der relativen Zulässigkeit erläutert. Seine Einführung dürfte auch nicht allzu große Schwierigkeiten bereiten.
Es sei ein Kalkül K gegeben. Dieser Kalkül wird durch die Hinzunahme einer neuen Grundfigur $\wedge$, der Konjunktion, ("und") erweitert: Bezeichnung $K_{\wedge}$. Die Figuren des erweiterten Kalküls A, B, C, ... bestehen dann aus den Figuren aus K und neben A, B auch aus $A \wedge B$. In den erweiterten Kalkül nehme man die Regeln aus K auf und zusätzlich

$$a, b \Longrightarrow a \wedge b \qquad (R_{\wedge})$$

(a, b sind Variable des erweiterten Kalküls.)

Aus der Vorstellung von Beispielen erwächst dann sehr schnell die Einsicht, daß Figuren des erweiterten Kalküls, welche die Grundfigur $\wedge$ nicht enthalten, genau dann ableitbar im erweiterten Kalkül sind, wenn sie dies schon in K selbst sind. Man sagt dann, die Erweiterung von K sei relativ zulässig.

Das Bestehen der folgenden Zulässigkeiten kann nach den bereits des öfteren vorgeführten Mustern durch Elimination nachgewiesen werden [1]:

1) Siehe hierzu auch P. Lorenzen, Formale Logik, S. 72 ff. oder auch P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, S. 56 ff.

$\vdash_{K_\wedge} A \wedge B \Longrightarrow A$

$\vdash_{K_\wedge} A \wedge B \Longrightarrow B$

$C \Longrightarrow A,\ C \Longrightarrow B \vdash_{K_\wedge} C \Longrightarrow A \wedge B$

Analog zur Konjunktion führt die Erweiterung des Kalküls K durch die Aufnahme der Grundfigur $\vee$ und der Regeln

$a \Longrightarrow a \vee b$

$b \Longrightarrow a \vee b$

(a, b sind Variable des erweiterten Kalküls, Bezeichnung $K_\vee$)
zur Einführung der Adjunktion.
Hier gilt

$A \Longrightarrow C,\ B \Longrightarrow C \vdash_{K_\vee} A \vee B \Longrightarrow C$

Der Nachweis führt man ebenfalls durch ein Eliminationsverfahren [1].

Nun sind aber die Mittel bereitgestellt zur Gewinnung eines neuen Logikkalküls: A, B, ... stehe für Zusammensetzungen aus a, b, ... mit $\wedge$, $\vee$ und $\Longrightarrow$. Die gleichen bei der Aufstellung des Konsequenzenkalküls schon benutzten Interpretationen lassen sich auch hier wieder benutzen. Es gilt:

(1) $A \prec A$
(2) $A \wedge B \prec A$
(3) $A \wedge B \prec B$
(4) $A \prec A \vee B$
(5) $B \prec A \vee B$

1) Die Zulässigkeit läßt sich auch mit Hilfe des Inversionsprinzips nachweisen.

(6) $A \prec B \;,,\; B \prec C \vdash\!\!\Rightarrow A \prec C$

(7) $C \prec A \;,,\; C \prec B \vdash\!\!\Rightarrow C \prec A \wedge B$

(8) $A \prec C \;,,\; B \prec C \vdash\!\!\Rightarrow A \vee B \prec C$

(9) $A \wedge B \prec C \vdash\!\!\Rightarrow A \prec B \Rightarrow C$

(10) $A \prec B \Rightarrow C \vdash\!\!\Rightarrow A \wedge B \prec C$

Dieser Kalkül wird mit Lorenzen B r o u w e r k a l - k ü l genannt. Brouwer selbst machte dieses System logischer Operationen in seiner Arbeit "Over de grondslagen der wiskunde" 1907 zur Grundlage der affirmativen Logik.

Im Fortgang des weiteren Ausbaus der Logik mittels der operativen Methode können auch die Variablen $\perp$ (falsum) und $\top$ (verum) eingeführt werden. Auf Peano zurückgehend [1], steht $\perp$ für logisch falsche und $\top$ für logisch wahre Aussagen. In der klassischen Logik der Junktoren gilt:

$\perp \prec A$ ex falso quodlibet sequitur und
$A \prec \top$ ex quodlibet verum sequitur.

Liegt in einem Kalkül die Regel $A \Rightarrow B$ vor, so ist sie zulässig
1) wenn B eine beliebige ableitbare Figur darstellt,
2) wenn A eine beliebige unableitbare Figur meint.
Die Einsicht hierzu liefert wiederum das Verfahren der Elimination, es sei aber auch an Überlegungen bei Einführung des protologischen Prinzips der Unableitbarkeit erinnert. Versteht man also unter $\top$ eine beliebige ableitbare und unter $\perp$ eine beliebige unableitbare Figur, dann ergeben sich die beiden Regeln

(11) $\perp \Rightarrow A$ bzw.

(12) $A \Rightarrow \top$

als zulässig. Sie ergänzen den vorgelegten Brouwerkal-

1) Siehe hierzu G. Peano, Formulaire de Mathématique, Turin 1894/1908.

kül. $\bot$ und $\top$ implizit über die vorgelegten Regeln einzuführen, scheint etwas mehr Schwierigkeiten in sich zu bergen.

Die Definition der Negation einer Aussage (Figur) erfolgt durch die Regel $A \Longrightarrow \bot$, wobei A eine beliebige Aussage eines beliebigen Kalküls sein soll. Für $A \Longrightarrow \bot$ schreibt man $\neg A$. Das Zeichen $\neg$ wurde von Heyting [1] eingeführt. (Russell verwendet $\sim A$, Hilbert $\bar{A}$.)

Mit Hilfe des Brouwerkalküls läßt sich z. B. $A \prec \bar{\bar{A}}$ nachweisen, aber nicht die Umkehrung [2]. Allerdings gilt dann wieder $\bar{A} \prec \bar{\bar{\bar{A}}}$ und $\bar{\bar{\bar{A}}} \prec \bar{A}$.

Der Brouwerkalkül (1) bis (12) - der Kalkül der affirmativen Logik - heißt unter Hinzunahme der Negation auch nach Lorenzen der Kalkül der e f f e k t i v e n L o g i k . Die Effektivität dieses Kalküls leitet sich aus dem Vermögen ab, das ermöglicht, für jede beweisbare Implikation eine allgemein zulässige Regel, Meta-Regel, Meta-Meta-Regel usw. anzugeben, die durch ein bestimmtes Eliminationsverfahren als zulässig nachgewiesen wird [3]. Selbstverständlich stimmt die angegebene operative Definition der Negation mit der intuitionistischen überein: A führt zu einem Widerspruch, A ist absurd.

---

1) Siehe hierzu A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungs-Berichte d. preuß. Akademie der Wissenschaften phys. math. Klasse, 1930.
2) Die Regel der doppelten Negation läßt sich nicht ableiten.
3) Hier geht es nur um die Darstellung der Tragweite eines solchen Logikaufbaus. Ein Aufbau in voller Breite muß sich auf die im protologischen Teil ausgeführten Prinzipien stützen. In den hier dargebotenen Ausführungen wurden sie wesentlich zur Einübung der Eliminationstechniken vorgeführt.

Man erhält aus der effektiven Logik die klassische, wenn das in jener nicht geltende tertium non datur

$$\vdash \neg A \vee \neg A$$

zusätzlich in den Kalkül der effektiven Logik aufgenommen wird. Für den Lernenden führt dies aber zu der Einsicht, daß Implikationen, die effektiv logisch gelten, auch in der klassischen Logik gültig sind, aber nicht umgekehrt [1]. Eine Didaktik, die diese Erkenntnis vertiefen will, muß allerdings neben den hier dargestellten Hauptkennlinien noch weitaus mehr Nebenresultate berücksichtigen [2].

Die vorgetragene Methode reicht auch noch so weit, daß mit ihrer Hilfe die Quantorenlogik (elementare Prädikatenlogik) aufgestellt werden kann.
Wiederum liege ein beliebiger Kalkül K vor. Auf Grund des Begriffs der relativen Zulässigkeit bereitet es nun keine besonderen Schwierigkeiten, den Einsquantor $\bigvee_x$ ("für einige x", Hilbert schreibt (Ex), Peano $\exists x$) einzuführen. In K nimmt man nun die neue Grundfigur $\bigvee_x$ auf. Die Regel

$$A(x) \Longrightarrow \bigvee_x A(x)$$

ist dann ersichtlich relativ zulässig. A(x) meint eine Figur mit der Variablen x, die in $\bigvee_x A(x)$ gebunden sein soll.

---

1) Nach Lorenzen gelten nämlich die klassischen Implikationen nur in primitiven Kalkülen, d. h. in solchen, deren Figuren (Aussagen) die folgende Form haben: einem Eigennamen s ist ein Prädikat P zugesprochen $s \in P$ oder abgesprochen $s \in' P$; außerdem müssen die Regeln die Eigenart besitzen, von einer Figur der Form $s \in P$ zu einer $s \in Q$ überzugehen:
$s \in P \Longrightarrow s \in Q$.
Weiteres hierzu findet man in P. Lorenzen, Formale Logik S. 94 f.

2) Entscheidend bleibt aber auch dazu die Herausarbeitung der Leitidee des geregelten Handelns, für die ein reichlich vorhandenes "Regel-Spielmaterial" je nach Altersstufe genügend Arbeitsmaterial bereitstellt.

Den Allquantor $\bigwedge_x$ ("für alle x") kann man für endlich viele vorliegende $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als abkürzende Schreibweise für die endliche Konjunktionsfolge $A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \ldots \wedge A(x_n)$ einführen. Die Aufhebung der Endlichkeit läßt den Allquantor aber nicht durch eine Regel definieren, die der Festsetzung der Konjunktion durch a, b $\Longrightarrow$ a $\wedge$ b analog ist. Der Lernende wirft hier mit Recht ein, daß der Pfeil $\Longrightarrow$ als Handlungsanweisung bisher nur Sinn hat, wenn vor ihm nur endlich viele Aussagen (Figuren) stehen. Man erinnert sich jedoch, daß die Implikation $\prec$ auch nur durch Betrachtungen in Meta-Kalkülen eingebracht wurde und außerdem Υ als beliebige ableitbare Figur zur Verfügung steht.
Die Festsetzung lautet dann: $\bigwedge_x A(x)$ ist genau dann in einem Kalkül abzuleiten, wenn vorher die Zulässigkeit von $\Upsilon \Longrightarrow A(y)$ nachgewiesen ist. Es muß also - in sprachlicher Formulierung - die Zulässigkeit von $\Upsilon \Longrightarrow A(a)$ für jede Figur a vorliegen.

Auch hier können wieder in dem entsprechend erweiterten Kalkül zulässige Regeln und Meta-Regeln aufgewiesen werden:

(13) $A(y) \prec \bigvee_x A(x)$

(14) $A(y) \prec C \Longrightarrow \bigvee_x A(x) \prec C$
(y nicht frei in der Konklusion)

(15) $\bigwedge_x A(x) \prec A(y)$

(16) $C \prec A(y) \Longrightarrow C \prec \bigwedge_x A(x)$
(y nicht frei in der Konklusion)

(1) bis (16) heißt mit Lorenzen a f f i r m a t i v e r Q u a n t o r e n k a l k ü l . Unter Aufnahme

der schon operativ eingeführten Negation nennt man ihn
e f f e k t i v e r Q u a n t o r e n k a l k ü l .

Soll hierin das tertium non datur gelten, so geht der effektive in den klassischen Quantorenkalkül über.

Ein weiterer Ausbau der Logik ist hier nicht beabsichtigt. Eine Didaktik, die sich der dargestellten operativen Methode bedient, hat neben den schon angeführten Gründen den Vorteil, daß sie an die heute vorherrschende Leitidee der Logikforschung heranführt, nach der - seit Frege - die Problematik der Logikkalküle das entscheidende Aufgabengebiet darstellt.

§ 4. Dialogische Einführung in die formale Logik

a) Wahrheit, Falschheit, wahrheitsdefinite -, beweisdefinite -, dialogdefinite Aussagen

Lorenzen hat zur Bewältigung der Aufgabe, den effektiven Quantorenkalkül als vollständig nachzuweisen, eine "dialogische Interpretation der effektiven Logik" aufgestellt, deren didaktische Nutzbarmachung - nicht zuletzt wegen der Neuheit der Ergebnisse - noch weitgehend unausgeführt ist [1]. Es sei ausdrücklich betont, daß die Darstellung der "dialogischen Interpretation" hier nicht deshalb geliefert wird, um mit ihrer Hilfe den wichtigen Beweis der Vollständigkeit des effektiven Quantorenkalküls zu leisten.

Eine Didaktik der Logik in dem hier interessierenden Sinne hat in entscheidendem Maße die Untersuchungen Freges zu berücksichtigen. Nach Frege lassen sich in den Sätzen der Wissenschaften zwei wesentliche Bestandteile unterscheiden:

1) feste Formen wie "und", "wenn - dann", "oder", Rechenschemata usw.
2) wechselnde Begriffe in diesen festen Formen.

Die festen Formen treten nun mit den wechselnden Begriffen in der Weise in Verbindung, daß sich die Bedeutungen der Formen mit den Bedeutungen der wechselnden Begriffe

---

1) Siehe hierzu die Forschungen von P. Lorenzen:
   1) Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium, in: Infinitist Methods, Proceeding of the Symposium on Foundation of Mathematics, Warsaw, 2 - 9 September 1959 (Oxford 1961)
   2) Metamathematik, Mannheim 1962
   3) Formale Logik, Berlin 1967
   4) Zusammen mit W. Kamlah, Logische Propädeutik, Mannheim 1967
   5) Normative Logic and Ethics, Mannheim

- die Formen ausfüllenden Gegenstände - zu einer Bedeutung des Satzes zusammenfügen. Soll dies aber nicht empirisch geschehen, so muß es eine Disziplin geben, die eben genau das erbringt.

In diesem Sinne hat Frege die Logik entwickelt als eine Wissenschaft von den Gesetzen der Satzbedeutungen, oder, anders gesagt, da nach Frege die Bedeutung des Satzes der Wahrheitswert ist, untersucht die Logik die Gesetze des Wahrseins. Die Bedeutung des Satzes ist das "Wahre" oder das "Falsche", ein Drittes gibt es nicht. Für Begriffe ausgedrückt heißt das, ein Gegenstand fällt unter einen Begriff oder er fällt nicht unter ihn oder jedes mathematische Problem ist entscheidbar.

Auch die natürlichen Sprachen - nicht nur wissenschaftliche Satzsysteme - bergen in sich logische Strukturen, d. h., sie enthalten Aussagen, deren Wahrsein allein auf Grund ihrer Form zutrifft [1]. Wenn ein Schüler in der Straßenbahn sitzt oder steht, er aber nicht sitzt, dann steht er. Schon zu Beginn dieses Kapitels wurde an einfachen Beispielen verdeutlicht, daß ein Mensch, sobald er sprechen kann, die Wahrheit von Aussagen allein durch ihre Form einsieht. Eine natürliche Sprache enthält notwendig diese Strukturen, ein Sprecher versteht sie. Ein Papagei spricht in diesem Sinne nicht. Die logische Form drückt sich in den eben angesprochenen Formausdrücken wie "wenn - dann", "und", "oder" usw. aus. Es stellt sich

1) Man vergleiche zu den philosophischen Grundlagen des Kalküls L. Eley, Metakritik der formalen Logik. "Aufgabe der Analysen dieser Untersuchungen (d. h. der 'Metakritik der formalen Logik') ist es, das ursprüngliche Handeln so weit und nur so weit hervorkommen zu lassen, daß seine Herabsetzung in das Operieren des Kalküls der Aussagen- und Prädikatenlogik sich vollzieht; dasselbe sagt: Aufgabe der Arbeit ist die transzendental-phänomenologische Konstitution der Aussagen- und Prädikatenlogik.", S. 42

nun aber die Frage, was logische Aussagen überhaupt aussagen. Eine Didaktik muß sich diesen Fragen stellen, sie muß "auf die Bedingungen der Möglichkeit von" eingehen, sie hat sich aus der Selbstvergessenheit des in "Naivität" formale Logik und Mathematik Treibenden herauszuheben. Sie muß ihr e i g e n e s T u n r e f l e k t i e r e n , um es so erst wirkungsvoll weitergeben zu können.

Seit Aristoteles verwendet aber die formale klassische Logik nur Aussagen, von denen feststeht, daß entschieden werden kann, ob sie wahr oder falsch sind. Es soll also für jede Aussage ein Verfahren existieren, auch wenn es augenblicklich noch unbekannt ist, nach dem sich die Wahrheit oder Falschheit ergeben muß. Die klassische formale Logik und Mathematik geht demnach von der platonischen Voraussetzung aus, es existiere für jede ihrer Aussagen ein Wahrheitswert "an sich", der nur nachträglich zu enthüllen ist. Genau dies meint Lorenzen mit der Bezeichnung "wahrheitsdefinite" Aussagen [1]: Wahrheitsdefinite Aussagen sind solche Aussagen, für die ein Entscheidungsverfahren festliegt - unter Umständen mehrere -, das genau einen Wahrheitswert liefert.

In einer naturwissenschaftlichen Aussage z. B. "Der Mond ist gebirgig" kann die Wahrheit der Aussage durch astronomische Beobachtungen oder durch die Erfolge der Raumfahrttechnik "bewiesen" werden. Die Mathematik enthält aber Aussagen, für welche die platonische These problematisch wird [2]. Eine Didaktik hat dies zu berücksichtigen, will sie nicht Metaphysik werden. Sie muß sich der berechtigten Frage des Lernenden nach dem Sinn einer solchen Festsetzung stellen; sie hat auf den Vorwurf,

1) Siehe etwa P. Lorenzen, Metamathematik, S. 15 ff.
2) Es ist ein Verdienst Brouwers, dies als erster erkannt zu haben.

daß eine "leere Behauptung" gesetzt werde, einzugehen.

An einem Beispiel möge dies erläutert werden. Die Vermutung sei: "Einige ungerade Zahlen sind vollkommen." Bis heute gibt es kein Verfahren, um die Wahrheit der Aussage zu entscheiden. Lorenzen, der dieses Beispiel bringt, fragt dann: "Welchen Sinn hat es aber dann, zu sagen, trotzdem sei diese Aussage entweder wahr oder falsch, sie sei 'an sich' entweder wahr oder falsch? Die Gegenfrage wird vermutlich lauten, warum man denn nicht annehmen dürfe, die Aussage sei entweder wahr oder falsch, selbst wenn wir (noch) nicht effektiv wissen, welcher Fall vorliegt. Hierzu noch einmal die Gegenfrage: Soll die Annahme, jede Aussage sei entweder wahr oder falsch - da sie nicht bedeuten kann, daß diese Disjunktion effektiv entscheidbar ist -, etwa nur bedeuten, daß

1) keine Aussage zugleich wahr und falsch ist und
2) keine Aussage zugleich nicht wahr und nicht falsch ist" [1].

Für den vorgelegten speziellen Fall besagt das aber die Behauptung der logischen Wahrheit folgender These: "Einige ungerade Zahlen sind vollkommen oder keine ungerade Zahl ist vollkommen". Damit gerät man aber in den Bereich der von Brouwer vorgetragenen Kritik. Die Anwendung der klassischen Logik auf unendliche Klassen wird zum Problem.

"Einige ungerade Zahlen sind vollkommen." Für diese Behauptung läßt sich jedenfalls ein Entscheidungsverfahren für das Vorliegen eines Beweises angeben:

1) Die vorgelegte Zahl muß ungerade sein.
2) Die Summe ihrer echten Teiler muß gerade die Zahl selbst wieder ergeben.

Es liegt hier also ein Verfahren vor, das gestattet, einem Beweisversuch die beiden Prädikate "gelungen" bzw. "mißlungen" zuzuordnen.

---

1) P. Lorenzen, a. a. O., S. 18 f.

Läßt z. B. ein Hochspringer die Latte auf eine bestimmte Höhe legen, so behauptet er damit, den "Beweis für seine Behauptung", nämlich die Latte zu überspringen, antreten zu können. Jedermann hat aber ein Verfahren an der Hand, nach dem Sprung den Beweisversuch als "gelungen" oder "mißlungen" anzusehen. Zur Erfassung dieses Sachverhaltes führt Lorenzen den Ausdruck "beweisdefinite Aussage" ein [1]. Selbstverständlich ist jede wahrheitsdefinite Aussage auch beweisdefinit.

Man vermag nun, Adjunktion $\vee$, Konjunktion $\wedge$ und Einsquantor $\bigvee_x$ (Existenzquantor) für beweisdefinite Aussagen zu definieren: Die beweisdefiniten Aussagen sind für diese einzuführenden Festlegungen abgeschlossen.

1) Adjunktion: Ein Beweis für $A \vee B$ liegt dann vor, wenn nach eigener Wahl ein Beweis von A oder B gebracht wird.
2) Konjunktion: Ein Beweis für $A \wedge B$ liegt dann vor, wenn sowohl für A als auch für B ein Beweis erbracht wird.
3) Einsquantor: Ein Beweis der Aussage $\bigvee_x A(x)$ ("für einige x: A(x)") liegt dann vor, wenn eine natürliche Zahl n vorliegt und ein Beweis von A(n) erbracht ist.

A, B seien beweisdefinite Aussagen, A(x) eine arithmetische Aussageform der Art "x ist eine Primzahl". Das "Sowohl - als auch" in (2) kann auch durch eine Hintereinanderausführung der Beweishandlungen ersetzt werden. Inhaltlich orientiert sich die Definition des Einsquantors an einer "unendlichen" Adjunktion

$A(1) \vee A(2) \vee \ldots \vee A(n) \vee \ldots$

Die Aussage $\bigwedge_x A(x)$ ("für alle x: A(x)") müßte als "un-

1) Siehe z. B. P. Lorenzen, Metamathematik, S. 19

endliche" Konjunktion vom konstruktiven Standpunkt her als bewiesen gelten, wenn für jede natürliche Zahl n A(n) bewiesen ist. Dies wäre aber - unter konstruktiven Gesichtspunkten - unhaltbar, doch läßt sich mit $\bigwedge_x A(x)$ auf andere Weise ein Sinn verbinden, und zwar legt man ihr eine spieltheoretische (dialogische) Deutung zugrunde. Der Vertreter der These verpflichtet sich, für jedes ihm vorgelegte n den Beweis von A(n) zu erbringen. In diesem Sinne ist aber dann - wie Lorenzen es formuliert [1] - die Allaussage $\bigwedge_x A(x)$ "dialogdefinit".

Selbstverständlich sind alle beweisdefiniten Aussagen auch dialogdefinit: Wahrheitsdefinite Aussagen $\subset$ beweisdefinite Aussagen $\subset$ dialogdefinite Aussagen.

Auf die didaktisch so fruchtbare Methode, Logik über Dialoge einzuführen, soll im folgenden eingegangen werden, zuvor wird dieser Ansatz aber in den weiteren Zusammenhang gestellt.

Gegen die von Frege am weitesten durchdachte und formulierte Zielsetzung der Logik können Bedenken erhoben werden [2]. Vom operativen Standpunkt her gesehen, ist Beweisen nichts anderes als das Herstellen einer Figur aus einer anderen Figur, und zwar am Leitfaden einer Regel. Dieses Verfahren, mit Lorenzen wird es Kalkül genannt, wurde im § 3 ausführlich behandelt. Es zeigte sich, daß von diesem Ansatz her die Logik des B e w e i s e n s, nicht die des W a h r s e i n s zu gewinnen ist. Der Kalkül der allgemein zulässigen Regeln für Kalküle liefert das Geforderte. Nun kann man aber auch das gleiche Resultat über den spieltheoretischen Ansatz des Dialogverfahrens als Gewinnstrategie im Spiel

1) Z. B. in P. Lorenzen, Metamathematik, S. 21
2) Sie sind wohl von Brouwer zuerst vorgebracht worden.

mit dialogdefiniten Aussagen erhalten. Man gewinnt zwar als Ergebnis wiederum einen Kalkül, und zwar den Kalkül des Beweisens, doch fordert dieser Nachweis selbst die Erörterung der "Bedingung der Möglichkeit von". Damit steht aber Lorenzen in der Nachfolge des Kantischen Programms.

Die Methode des im § 3 vorgestellten Vorgehens läßt sich auch noch auf andere Wissenschaftsbereiche übertragen, d. h., nach Lorenzen kann die sich im Übergang von Protologik zur Logik zeigende Struktur auch auf jene Gebiete angewandt werden, die dem Kantischen Begriff des synthetischen apriorischen Urteils unterstehen [1]. Das führt zum Programm einer Protophysik, die in eben der analogen Übertragung der Protologik die Bedingungen der Möglichkeit des Messens untersucht und deshalb selbst noch nicht zur Physik gerechnet werden kann. Protophysik ist dann die Lehre von den nicht-hypothetischen Sätzen über Raum, Zeit und Masse, d. h., ihr Gebiet ist die Erstellung von idealen Normen zur Herstellung von Meßgeräten. Dazu gliedert sie sich in die Disziplinen Geometrie, Chronometrie und rationale Mechanik. Effektive Logik und Arithmetik handeln von Gegenständen, die von uns selbst hergestellt werden können, im Gegensatz hierzu ist Geometrie als konstruktive Theorie nicht mehr aufzubauen. Die Normen sind nicht beweisbar, sondern lediglich unwiderlegbar, ein Widerlegungsversuch eines Opponenten muß scheitern. Das Problem der Geometrie im Zusammenhang mit dem operativen Standpunkt wird noch eingehendst behandelt.

---

1) Eine Analyse dieses Vorgehens wird an späterer Stelle dieser Arbeit vollzogen. Siehe z. B. bei Kamlah - Lorenzen, Logische Propädeutik, S. 225 ff. oder P. Lorenzen: "Wie ist die Objektivität der Physik möglich" oder "Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung" in Methodisches Denken, Frankfurt 1968

b) Aufbau der formalen Logik im Ausgang von Dialogen

Es gilt nun, im Ausgang von Dialogen die formale Logik aufzubauen [1]. Wie schon zu Beginn dieses Paragraphen bemerkt, führt dieser methodische Ansatz auf einen Logikkalkül, der bereits auf anderem Weg mit den Mitteln der Protologik erhalten wurde. Protologik ist - es sei nochmals daran erinnert - die Lehre von den Eliminationsverfahren, d. h. die Lehre, welche die Zulässigkeit von gewissen Regeln in gewissen Kalkülen behandelt. Regeln sind dabei bedingte Imperative, Handlungsanweisungen, für die es selbstverständlich wahr und falsch nicht gibt. Gewißheit erlangte der Lernende, im Sinne des Vermögens bestimmte Handlungen ausüben zu können.

Eine didaktisch direkt zu verwertende Erkenntnis findet sich in der Einsicht, daß Aussagen im Hinblick auf einen Dialog, sei er auch nur fingiert, ausgesprochen werden. Damit vermag man aber, einen Einstieg in die dialogische Interpretation der Logik auszubauen. Die Methode nimmt somit die klassischen rationalen Argumentationsversuche etwa eines Sokrates oder der Disputierkunst der Scholastik wieder auf.

Der dadurch erzielte pädagogische Wert - gerade in einer Zeit der ideologischen Auseinandersetzungen - kann wohl nicht hoch genug eingeschätzt werden.

Im Erlernen rationaler Argumentationsweisen liegt der pädagogische Gewinn einer dialogischen Einführung der Logik, der damit die enge wissenschaftliche Fruchtbar-

1) Im Anschluß an seinen Lehrer P. Lorenzen hat K. Lorenz in: Arithmetik und Logik als Spiele, Dissertation, Kiel 1961, diesen methodischen Ansatz ausgebaut. Die hier vorgelegte Darstellung wird die Ergebnisse einbeziehen.

keit weit überschreitet. Rationales Argumentieren wird so zur Voraussetzung eines kritisch Denkenden. Ihre Vermittlung stellt sich damit als vordringliche Aufgabe eines jeden Lehrers.

Der Dialog kann als Spiel zwischen zwei Parteien angesehen werden. Diese Zweiparteienspiele enthalten die gleiche Struktur wie jeder Dialog: Ein Spieler, der Proponent, eröffnet das Spiel, den Dialog, mit einer Aussage, der Behauptung. Der Gegenspieler, der Opponent, versucht nun, diese Aussage zu widerlegen. Die Handlungen der einzelnen Spieler im Verlauf des Dialogs mögen Züge heißen. Wenn jemand also eine Aussage behauptet, so geht er damit den Versuch ein, sie gegen die Angriffe des Opponenten zu verteidigen.

Aussagen unterscheidet man in

1) primitive Aussagen, Primaussagen, sie enthalten keine logischen Partikel. Ihre Form ist x ∈ P: "Hans ist Schüler." Bezeichnung: a, b, c, ...
2) zusammengesetzte Aussagen - auch Aussageformen -, sie sind aus Primaussagen mit Hilfe der logischen Partikel [1] zusammengesetzt. In dieser Funktion heißen die Primaussagen auch Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage. Bezeichnung: A, B, C, ...

Für die Dialoghandlungen (Züge) stehen folgende Möglichkeiten offen:

1) Sie bestehen aus Aussagen (Teilaussagen sind zugelassen).
2) Sie bestehen in der Aufforderung zu Aussagen (Teilaussagen):
   a) Aufforderung zu einer Aussage A, Bezeichnung: A ?
      ? bezeichnet also den Angriff, gelesen: "dubito"

1) Sie werden im folgenden noch dialogisch eingeführt.

oder "A wird angezweifelt" oder "Angriff auf A".

b) Bei zusammengesetzten Aussagen: Aufforderung (Angriff) zur linken oder rechten, ersten oder zweiten Teilaussage: R ?, L ?, 1 ?, 2 ? Gelesen wird dies entsprechend zu a).

c) Aufforderung (Angriff) zu einer Aussage A(n) an Stelle der Variablen x in A(x): ? n. Gelesen entsprechend zu a).

Jeder Zug besteht aus einem Angriff oder aus einer Verteidigung einer Aussage. Zu Beginn des Spiels (des Dialogs) behauptet der Proponent eine Aussage. Darauf wechseln sich Angriff und Verteidigung gegenseitig ab. Ein Angriff und die ihm entsprechende Verteidigung bilden eine Runde. Wie noch zu zeigen sein wird, reduziert sich der Dialog um zusammengesetzte Aussagen auf Teildialoge, die um immer "einfacher" werdende Aussagen zu führen sind.

Aus Primaussagen a, b kann man mit Hilfe der konstruktiven Subjunktion —> zusammengesetzte Aussagen, also z. B. a —> b, bilden. Eine solche Subjunktion, die umgangssprachlich mit "wenn a, dann b" bezeichnet ist, soll hier nun erklärt (eingeführt) werden:

Angenommen, jemand behauptet A —> B, dann soll er damit die Aufgabe übernehmen, B zu beweisen, wenn andererseits der Beweis von A erbracht werden kann. In einem Dialog (Zweipersonenspiel) stellt sich dies dann folgendermaßen dar: Der Proponent P behauptet die Aussage A —> B. Der Opponent O soll nun lediglich dann eine Chance haben, die vorgelegte Aussage anzugreifen, wenn er seinerseits A beweisen kann. P ist dann gezwungen, B zu beweisen. In einem Tableau aufgeschrieben, heißt das:

(Verteidigung) P		O	(Angriff)
	A —> B	A	(O behauptet A)
(Beweise A!) (A wird bezweifelt)	A ?	A	(O beweist A)
(P behauptet B)	- B	B ?	(Beweise B!) (B wird bezweifelt)
(P beweist B)	B		

Um die dialogische Beweisbarkeit einer Aussage des Proponenten P festzulegen, d. h. um eine Gewinnstrategie für ihn anzugeben, muß die für P ungünstigste Situation untersucht werden. Sie liegt dann vor, wenn O alle die von ihm behaupteten Elementaraussagen beweisen kann und P nur solche Aussagen behaupten darf, die aber schon vorher von O in einem Spielzug aufgestellt wurden.

Die Spielregel für den Proponenten lautet also: Der Proponent P darf nur solche Aussagen behaupten, die der Opponent O schon vorher behauptet hat. Diese Aussagen dürfen von O nicht mehr bezweifelt werden.

Die Spielregeln für den Opponenten heißen: Der Proponent muß die Elementaraussage, die O behauptet, hinnehmen, denn in dem für P ungünstigsten Fall kann O diese ja beweisen. O hat während des ganzen Dialogverlaufs alle seine Behauptungen zu beweisen.

Je ein Angriff und die zugehörige Verteidigung mögen geschlossene Runde heißen. Unter einer offenen Runde ver-

steht man eine solche, die nur aus einem Angriff besteht. Den Dialog hat derjenige Spieler gewonnen, der die letzte offene Runde des Dialogs eröffnet hat.

Es wird sich zeigen, daß der Dialog unabhängig vom Inhalt seiner Elemente geführt werden kann. Nur solche Dialoge, in denen Aussagen rein ihrer Form nach umstritten sind, interessieren im folgenden.

"Nach Frege ist der Sinn einer Aussage Suchen, Fragen. Die Frage wird bejaht oder verneint. Die Frage hat sich aber sodann zu behaupten; sie behauptet sich oder sie behauptet sich nicht. Sie ist insofern Bestimmung. Die Behauptung ist Reaktion auf eine Affektion. In der Beantwortung der Frage ist also sowohl Bejahung (Verneinung) wie Sich-Behaupten (Sich-Nichtbehaupten) beschlossen. Es zeigt sich nun, daß der zweite Aspekt des Gedankens, nämlich das Sich-Behaupten bzw. das Sich-Nichtbehaupten, sich als Handeln gemäß der Proposition bestimmt; der Proponierende ist sozusagen der Affizierende. Die Einheit von Affektion und Aktion ist das Erinnerungsvermögen (man könnte auch von produktiver Einbildungskraft sprechen). Kraft des Erinnerungsvermögens ist die proponierende Anzeige gewußtes Vermögen; das Sich-Behaupten bzw. Sich-Nichtbehaupten ist insofern Bejahen und Verneinen im Dialog, d. h. logische Tätigkeit" [1].

Der Proponent verpflichtet sich, den Dialog nach endlich vielen Schritten zu beenden, sonst hat er den Dialog verloren.

In einem ersten Schritt wurde der Junktor —> ("wenn - dann") durch eine erfolgreiche Verteidigung der These A —> B eingeführt. Im folgenden sind nun weitere Junk-

1) L. Eley, Metakritik, S. 343

toren dialogisch zu erklären.
Die Adjunktion A ∨ B zweier Aussagen, die umgangssprachlich durch "A oder B" ausgedrückt werden kann, soll wie folgt definiert werden:
Der Proponent übernimmt mit der Behauptung von A ∨ B die Verpflichtung, bei Bezweiflung dieser Aussage wenigstens eine der Teilaussagen zu verteidigen (beweisen). In einem Tableau ausgedrückt, heißt dies:

P	O
A ∨ B	?
A | B	

Die Konjunktion A ∧ B, die umgangssprachlich etwa durch "A und B" ausdrückbar ist, soll durch folgenden, vom Proponenten erfolgreich zu verteidigenden Dialog definiert werden:
Der Proponent übernimmt mit der Behauptung der These A ∧ B die Verpflichtung, auf den Angriff des Opponenten hin sowohl A als auch B zu verteidigen (beweisen). Schematisch geschrieben, heißt dies:

P	O
A ∧ B	A ?
A	B ?
B	

Ein Satz, der unabhängig von den in ihm enthaltenen Teilaussagen in jedem Dialog erfolgreich verteidigt werden kann, bezeichnet man als e f f e k t i v l o g i s c h e n Satz. Wie noch zu zeigen ist, erhält man nämlich über die dialogische Einführung weiterer Junktoren genau die über geregelte Handlungen (Kalkülbegriff) aufgestellten Handlungsschemata der effektiven Logik. Eine im dialogischen Sinne effektiv logische Aussage ist

eine solche allein auf Grund deren Form. Logische Wahrheit oder logische Falschheit - dialogisch interpretiert - erhält auf diese Weise eine spieltheoretische Deutung.

Unter Beachtung der oben festgelegten Spielregeln ist z. B. mit A —> (B —> A) ein effektiv logischer Satz (Aussage) vorgelegt. Dazu muß er in einer Disputatio mit den angegebenen Regeln zu verteidigen sein.

	P	O
1.	A —> (B —> A)	A
2.	A ?	Beweis von A
3.	B —> A	B
4.	B ?	Beweis von B
5.	A	A ?
6.	O 2. Schritt	

Die Aussage A —> (B —> A) läßt sich also in einem Dialog verteidigen, sie ist in semantischer Ausdrucksweise in diesem Sinne allgemeingültig.

Im folgenden sollen noch andere Beispiele das angegebene Verfahren verdeutlichen. Proponierte Aussage: A —> A

	P	O
1.	A —> A	A
2.	A ?	Beweis von A
3.	A	A ?
4.	O 2. Schritt	

In diesem Dialog hat der Proponent die rechte Seite der Subjunktion zu verteidigen, da nach den Dialogregeln O den Beweis der linken Seite der Subjunktion zu liefern vermag. P gewinnt aber dann den Dialog, da er sich für

den von ihm geforderten Nachweis auf den schon vorher geleisteten Beweis von O berufen kann.

Proponierte Aussage: A —> A ∨ B

	P	O
1.	A —> A ∨ B	A
2.	A ?	Beweis von A
3.	A ∨ B	A ?
4.	O 2. Schritt	

Analog läßt sich auch B —> A ∨ B beweisen.

Im weiteren sind die Angriffe auf eine vom Opponenten behauptete Elementaraussage weggelassen, da sie von ihm ja - nach den Spielregeln - auch nachgewiesen werden können. Diese Runde wurde bisher nur aus Gründen der bewußten Anwendung der Spielregeln explizit angegeben.
Proponierte Aussage: A ∧ B —> A

	P	O
1.	A ∧ B —> A	A ∧ B
2.	A ?	A
3.	B ?	B
4.	A	A ?
5.	O 2. Schritt	

Analog kann die Aussage A ∧ B —> B verteidigt werden.

Nimmt man hypothetisch die Gültigkeit der Subjunktionen A —> B und B —> C an, so läßt sich die Aussage

A —> B ,, B —> C ⟹ A —> C

verteidigen. Das Doppelkomma ,, bzw. der Doppelpfeil ⟹ dienen der Bezeichnung (Mitteilung) der Aussage.

	P	O
0.	A —> B	
	B —> C	
1.	A —> C	A

Da die Aussage A —> B hypothetisch gelten soll, kann der Proponent aus der Vorlage von A die Aussage B dialogisch schließen. Dann vermag der Proponent wegen der Hypothese B —> C aber auch C zu beweisen, d. h., der Dialog hat insgesamt den Verlauf:

	P	O
0.	A —> B	
	B —> C	
1.	A —> C	A
2.	C	

Mit der gleichen Methode lassen sich auch die nachfolgenden Aussagen beweisen:

$C \to A \;,,\; C \to B \models C \to A \wedge B$

$A \to C \;,,\; B \to C \models A \vee B \to C$

$(A \wedge B) \to C \models A \to (B \to C)$

$A \to (B \to C) \models (A \wedge B) \to C$

Die Klammer hat Mitteilungsfunktion.

Läßt sich von einer (zusammengesetzten) Aussage A auf eine Aussage B dialogisch schließen, so vereinbart man hierfür die Bezeichnung $A \prec B$ ("A impliziert B"). Damit ist man nun im Besitz folgender dialogisch gerechtfertigter Aussagen:

(1) $A \prec A$

(2) $A \wedge B \prec A$

(3) $A \wedge B \prec B$

(4) $A \prec A \vee B$

(5) $B \prec A \vee B$

(6) $A \prec B \,,, B \prec C \models A \prec C$

(7) $C \prec A \,,, C \prec B \models C \prec A \wedge B$

(8) $A \prec C \,,, B \prec C \models A \vee B \prec C$

(9) $A \wedge B \prec C \models A \prec B \rightarrow C$

(10) $A \prec B \rightarrow C \models A \wedge B \prec C$

Ersichtlich liegt hiermit der dialogisch interpretierte affirmative Logikkalkül vor. Das vorgelegte System kann aufgefaßt werden als Kalkül, durch den sämtliche dialogisch begründbaren Aussagen ableitbar sind. Umgekehrt liefert der Kalkül nur dialogisch begründbare Aussagen [1].

In dem hier vorgetragenen Aufbau einer dialogischen Einführung der Logik - bisher nur bis zur affirmativen Logik geleistet - wurde stets stillschweigend vorausgesetzt, daß die schon im Dialogverlauf bewiesenen Aussagen während des ganzen Dialogs zur Verfügung stehen und stets zitiert werden können. Nach Mittelstaedt verlieren aber quantenmechanische Aussagen die fast trivial erscheinende "protologische" Eigenschaft der "unbeschränkten Verfügbarkeit": Die Quantenlogik muß sich auf eine nur "beschränkte Verfügbarkeit" ihrer Aussagen stützen [2].

Im weiteren soll die affirmative Logik der dialogdefiniten Aussagen zu einer effektiven ausgebaut werden. Dazu

---

1) Die so wichtige Eigenschaft der Vollständigkeit und Konsistenz bezüglich dialogisch begründbarer Implikationen soll - wie schon am Anfang des Paragraphen bemerkt - übernommen werden.

2) Siehe zu den sich hieraus ergebenden Änderungen:
P. Mittelstaedt, Philosophische Probleme der Physik, 2. Auflage, Mannheim 1966;
Untersuchungen zur Quantenlogik, Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften, München 1959;
Über die Gültigkeit der Logik in der Natur, Naturwissenschaften 47, 385 (1960)
Quantenlogik, Fortschritte d. Physik, 9, 106 (1961)

sind noch weitere logische Partikel festzulegen.

Die Negation $\neg A$ einer Aussage A ("nicht A" besser: "A ist widerlegbar") sei folgendermaßen dialogisch definiert:
$\neg A$ kann erfolgreich verteidigt werden, falls der Opponent $\neg A$ nicht bezweifelt (trivialer Fall). Bezweifelt der Opponent $\neg A$, so muß er seinerseits A verteidigen. Dies gelingt ihm nach den Spielregeln stets, falls A eine elementare Aussage ist. Vermag der Opponent aber auch sonst, A zu verteidigen, so hat der Proponent den Dialog verloren. Kann O aber A nicht verteidigen, so gewinnt P mit der proponierten Aussage $\neg A$. Als Tableau geschrieben:

P	O	
$\neg A$	A	
A ?	Beweis von A	kein Beweis von A
	O gewinnt	P gewinnt

Damit ist z. B. die Aussage $\neg (A \wedge \neg A)$ dialogisch begründbar:

	P	O
1.	$\neg (A \wedge \neg A)$	$A \wedge \neg A$
2.	A ?	Beweis von A
3.	$\neg A$?	$\neg A$
4.	A	A ?
5.	O 2. Schritt	

Gelingt dem Opponenten im zweiten Schritt nicht der Beweis von A, was ja für nicht-elementare Aussagen möglich ist, so bricht der Dialog schon an dieser Stelle ab. Der Proponent gewinnt in der zweiten Runde. Das vorgelegte Tableau zeigt also nur den für den Proponenten ungün-

stigsten Spielverlauf, den er aber auch dann gewinnt.

Als Kenner der klassischen Logik weiß man, daß $A \vee \neg A$ eine logisch wahre Aussage ist. $A \vee \neg A$ läßt sich dagegen nicht in jedem Fall in einem Dialog verteidigen:

P		O
$A \vee \neg A$		?
A	$\neg A$	? A
	A ?	

A

Der Proponent gewinnt, falls er A beweisen oder aber der Opponent A nicht beweisen kann. Aus diesem Grunde kann für Aussagen, die in einem Dialog gewonnen werden können, nicht $A \vee \neg A$ an die Stelle von $A \longrightarrow B$ treten, wie das ja im klassischen Fall möglich ist.

Weiterhin werden die Aussagen $\top$ und $\bot$ eingeführt: $\top$ darf nicht bezweifelt (angegriffen) werden, wer $\bot$ behauptet, verliert den Dialog. Damit sind dann die Aussagen

(1) $A \longrightarrow \top$

(2) $\bot \longrightarrow A$

dialogisch begründbar:

(1)

P	O
$A \longrightarrow \top$	A
$\top$	

(2)

P	O
$\bot \longrightarrow A$	$\bot$

$\top$ ist durch jede dialogisch zu verteidigende Aussage ersetzbar.

Aus dem Vergleich der Einführung der Widerlegung (Negation) einer dialogdefiniten Aussage mit dem Dialogverlauf der Subjunktionsaussage $A \rightarrow \bot$ erkennt man, daß $\neg A$ auch durch die Aussage $A \rightarrow \bot$ definierbar ist. Indem B in (10) des affirmativen Kalküls durch $A \rightarrow C$ ersetzt wird, entsteht aus der Hypothese $A \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ eine allgemein dialogisch zu verteidigende Aussage.

	P	O
1.	$A \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$	A
2.	$(A \rightarrow C) \rightarrow C$	$A \rightarrow C$
3.	A	C
4.	C nach O 3.	

Das heißt aber, $(A \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow C$ ist dialogisch beweisbar, was selbstverständlich auch direkt zu zeigen ist. Ersetzt man hierin und in (10) für C die Aussage $\bot$, so erhält man die Sätze

$A \wedge \neg A \prec \bot$

$A \wedge B \prec \bot \models\!\!\rightarrow A \prec \neg B$

aber auch

(11) $A \wedge \neg A \prec \bot$

(12) $A \wedge B \prec \bot \models\!\!\rightarrow B \prec \neg A$

Aus diesen beiden Sätzen folgt aber auch

$\top \prec \neg A \models\!\!\rightarrow A \rightarrow \bot$

und umgekehrt. Deshalb kann also die Definition von $\neg A$ durch (11) und (12) ersetzt werden. Erweitert man den affirmativen Kalkül für dialogdefinite Aussagen durch (11) und (12), so ergibt sich der Kalkül der effektiven Logik.

Der Schluß von der Negation der Negation auf die Affirmation ist kein logischer Schluß (in dem hier vorgestellten Sinne):

P	O
$\neg\neg A \rightarrow A$	$\neg\neg A$
$\neg A$	A

P vermag die von ihm proponierte Aussage nicht in jedem Fall zu verteidigen, nämlich dann nicht, falls der Opponent A beweisen kann.

Nimmt man zum System der effektiven Logik noch das tertium non datur, ausgedrückt durch

(13) $\top \rightarrow A \vee \neg A$

hinzu, so entsteht der Kalkül der vollständigen klassischen Aussagenlogik. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß (13) sich dialogisch nicht verteidigen läßt. Die klassische Aussagenlogik entsteht damit aus den dialogisch verteidigbaren Sätzen (1) bis (12) unter Hinzunahme der Hypothese (13). Wegen (1) bis (13) bilden die Aussagen einen Boolschen Verband. Aus dem Blickwinkel der dialogischen Logik meint die klassische Logik der wahrheitsdefiniten Aussagen nichts anderes als einen Spezialfall der Logik dialogdefiniter Aussagen unter Hinzuziehung des tertium non datur bzw. hierzu äquivalenter Hypothesen.

Allaussagen lassen sich folgendermaßen dialogdefinit festsetzen: P behaupte $\bigwedge_x A(x)$ ("für alle x: A(x)"). Der Gegenspieler kann dann nach eigener Wahl eine natürliche Zahl n vorlegen. Gelingt es P, A(n) zu beweisen, so hat er gewonnen, sonst verloren. Ebenfalls ist $\bigvee_x A(x)$ ("für einige x: A(x)") dialogdefinit: Ein Beweis von $\bigvee_x A(x)$ erfordert vom Proponierenden die Angabe einer natürlichen Zahl n mit dem zugehörigen Beweis von A(n).

Als Beispiel sei das Transitivitätsgesetz der Subjunk-

tion dargestellt:

$\bigwedge_x (A(x) \longrightarrow B(x)), \bigwedge_x (B(x) \longrightarrow C(x)) \models \bigwedge_x (A(x) \longrightarrow C(x))$

Dies läßt sich übrigens auch wie folgt schreiben:

Hypothese 1: $\bigwedge_x (A(x) \longrightarrow B(x))$

Hypothese 2: $\bigwedge_x (B(x) \longrightarrow C(x))$

Proponierte Aussage (These): $\bigwedge_x (A(x) \longrightarrow C(x))$

	P	O
O_1	$\bigwedge_x (A(x) \longrightarrow B(x))$	
O_2	$\bigwedge_x (B(x) \longrightarrow C(x))$	
1.	$\bigwedge_x (A(x) \longrightarrow C(x))$	n
2.	$A(n) \longrightarrow C(n)$	A(n)
3.	C(n)	? C(n)
4.	n vorgegeben für O_1	$A(n) \longrightarrow B(n)$
5.	A(n)	B(n)
6.	n vorgegeben für O_2	$B(n) \longrightarrow C(n)$
7.	B(n)	

Hier gibt der Opponent auf, denn er müßte C(n) setzen, das er im 3. Schritt angegriffen hat, oder er müßte B(n) angreifen, das er im 5. Schritt behauptet hat.

Für den Lernenden bieten sich nun keine Schwierigkeiten mehr, Schemata für den Verlauf von Gewinnstrategien aufzustellen. Dazu müssen also die jeweiligen Möglichkeiten des Dialogverlaufs untersucht werden, je nachdem, ob der Proponent oder der Opponent eine Konjunktion, Adjunktion, Subjunktion, Negation, Allaussage oder Existenzaussage vorlegt [1].

1) Die Zusammenstellungen bieten nichts Neues mehr. Sie können P. Lorenzen, Metamathematik, S. 26 ff. entnommen werden.

c) Der Zusammenhang zwischen der operativen Methode geregelter Handlungen und der operativen Methode rein sprachlicher Handlungen (Dialogen) beim Aufbau der formalen Logik

Liest man die so gefundenen Gewinnschemata von unten nach oben, so erhält man nach Beth [1] ein schon bekanntes Verfahren, den Kalkül. Unter Benutzung der von Lorenzen [2] vorgeschlagenen linearen Schreibweise entsteht, sozusagen als Kurzform der Tableauschemata, der Sequenzenkalkül von Gentzen [3], der Kalkül der effektiven Logik oder in anderer Bezeichnung der Kalkül des "natürlichen" Schließens.

Die dargestellte Einführung logischer Partikel durch Dialoge ist unabhängig von ihrem umgangssprachlichen Gebrauch, doch liegt der Wert der vorgeschlagenen Methode nicht zuletzt in einer Normierung möglicher Disputationen [4]. Der vorgelegte Weg vermittelt eine Propädeutik des so dringend notwendigen rationalen Argumentierens.

Von einem Vertreter der platonischen Entitäten der Logik wird die vorgetragene dialogische Begründung sicherlich als ein Angriff auf die vermeintliche Objektivität und absolute Verbindlichkeit der Logik angesehen [5]. Doch

1) E. W. Beth, Semantic Entailment and Formal Derivability, Mededelingen der Kon. Ned. Akad. v. Wet., newseries, vol. 18, no. 13, Amsterdam 1955, oder auch in: The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959
2) Metamathematik, S. 29 ff.
3) G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Mathem. Zeitschrift, 39, 1934
4) Zu der Frage der Vollständigkeit dieses methodischen Weges siehe K. Lorenz, Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen, Archiv f. math. Logik und Grundlagenf. 11 (1968) 32 - 55 und 73 - 100
5) Die ontologisierende Grundhaltung ist zweifellos die in Forscherkreisen der Mathematik und Logik am weitesten verbreitetste, ohne daß sie freilich den Vertretern dieser Wissenschaften meist bewußt ist.

stellt sich für diese Ansicht sofort die Frage nach ihrer Begründung und didaktischen Umsetzung. Die dargestellte Methode weiß um ihre geschichtlichen Vorgänger z. B. in der Fundierung der griechischen Logik in Dialektik und Rhetorik und der scholastischen Disputierkunst [1].

Im letzten Teil wurde der Zusammenhang zwischen der operativen Methode der geregelten Handlungen und der operativen Methode der rein sprachlichen Handlungen, den Dialogspielen, deutlich. Darin enthüllt sich ein allgemein didaktisch zu verwertendes Ergebnis - selbstverständlich neben den anderen Resultaten, die hier nicht nochmals aufzuzählen sind. Eine spezielle Didaktik (Unterrichtsausarbeitung) müßte diese als ihre wichtigsten Stützen einarbeiten. Dies soll hier nicht geschehen, da es in der vorgelegten Arbeit um die Bedingungen der Möglichkeiten "einer solchen Didaktik", grob gesprochen, um die Vermittlung von Einsichten "in die Zusammenhänge" geht.

Die Schwierigkeiten, mit denen eine konstruktive Mathematik zu kämpfen hat, liegen nicht zuletzt in einer auf Aristoteles zurückgehenden Auffassung von Definition und Beweis: Beweise führen stets von Sätzen zu anderen Sätzen; wollen sie nicht in einem unendlichen Regreß beginnen, so muß jegliches Beweisen mit unbewiesenen Sätzen, den Axiomen, anheben. Analog muß jedes Definieren mit unbewiesenen Grundbegriffen anfangen. [2]

Die vorgestellte operative Methode sprengt aber die

1) Auf die so wichtigen Untersuchungen Wittgensteins kann hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur schlagwortartig auf seinen Vergleich des Gebrauchs der Wörter mit Spielen und Kalkülen verwiesen. Siehe z. B. Philosophische Untersuchungen

2) Dies bildet auch die Basis der regulae ad directionem ingenii des Descartes.

nicht mit Notwendigkeit so eng gezogenen Grenzen des Beweisens und Definierens. Es sei kurz erinnert, daß eben über geregelte Handlungen Definitionen vorgenommen werden, die sich nicht auf Undefiniertes im letzten Rückgang stützen.

In den Beweisen von Zulässigkeiten durch Eliminationsverfahren zeigte sich eine Gewißheit, die nicht ihr Fundament in den gegenseitigen Verkettungen von Sätzen hat, sondern im "Verstehen der Verfahren". Sie bezieht ihre Sicherheit aus der Gewißheit, nicht widerlegt werden zu können.

§ 5. Lorenzens Versuch der Konstruktion einer Wissenschaftssprache

a) Die "Logische Propädeutik" als Vorschule der Sprachdisziplinierung

Dieser Abschnitt [1] dient als Versuch, die bisher dargestellten Methoden auf noch breiterer Ebene auszuführen, d. h. durch Einordnung in eine allgemeinere Zielsetzung zusätzliche Einsichten zu vermitteln. "Betrachten wir die natürliche Sprache als ein auf See befindliches Schiff, so können wir unsere Situation auch folgendermaßen darstellen: Wenn es kein erreichbares Festland gibt, muß das Schiff schon auf hoher See gebaut worden sein; nicht von uns, aber von unseren Vorfahren. ... Für das Problem der Methode unseres Denkens müssen wir uns aber in einen Zustand ohne Schiff, d. h. ohne Sprache versetzen und müssen versuchen, die Handlungen nachzuvollziehen, mit denen wir - mitten im Meer des Lebens schwimmend - uns ein Floß oder gar ein Schiff erbauen könnten" [2].

Lorenzen setzt also das Postulat eines methodischen Anfangs, um etwa, was hier ja besonders interessiert, durch Rekonstruktion einer gemeinsamen Sprachbasis mathematische Konstruktion erst zu ermöglichen. Er steht im Einvernehmen mit Kant, wenn er den methodischen Anfang einer Wissenschaftssprache von allgemeiner Verbindlichkeit zu

1) Siehe hierzu die entsprechenden Aufsätze in der Sammlung P. Lorenzen, Methodisches Denken. Sie bilden den Kern der "Logischen Propädeutik" von W. Kamlah und P. Lorenzen, Mannheim 1967. Zur philosophischen Kritik siehe L. Eley, Metakritik der formalen Logik, insbesondere S. 371 ff. und auch M. Lang, Wittgensteins Philosophische Grammatik, Dissertation, Köln 1971.

2) P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 28 f.

setzen versucht. Es gent um die (Re-)Konstruktion der Rede, die von elementaren Bausteinen ausgeht und bis hin zu den Termini der Wissenschaften führen soll. Die Gültigkeit von Aussagen ist dabei zu sichern durch die explizite Angabe ihrer Verwendung. Die "Logische Propädeutik" versteht sich dabei als ein Katalog von Vorschlägen zur Sprachdisziplinierung, als "Vorschule des vernünftigen Redens".

Der Aufbau nimmt seinen Ausgang in der elementaren Prädikation. "Terminologisch ausgedrückt bedeutet dies wiederum nichts anderes, als daß jede Reflexion über die Prädikation von dieser selbst schon Gebrauch machen muß und darum auch nicht imstande ist, sie in einem wie auch immer gearteten Sinne zu begründen. Als eine fundamentale sprachliche Handlung ist die Prädikation unhintergehbar" [1]. Diesen Prädikatoren P werden Gegenstände S, bezeichnet durch Eigennamen, zu- bzw. abgesprochen:

S ε P ε steht für "ist".
S ε' P ε' steht für "ist nicht".

Diese elementaren Sätze sind, da eine ungeklärte Meta-Sprache zu vermeiden ist, durch exemplarische Definitionen einzuführen. Hierin drückt sich deutlich ein experimenteller pädagogischer Zug aus: An einem genügend großen Beispielmaterial sollen die Sprachformen eingeübt werden.

Im folgenden wird der Aufbau nicht weiter referiert, jedoch sollen die für eine Didaktik so entscheidenden Begriffe wie Abstraktion und Menge auf der Basis der "Logischen Propädeutik" kritisch analysiert werden.

1) J. Mittelstraß, Die Prädikation und die Wiederkehr des Gleichen, Ratio, Bd. 10, S. 53 - 61 (1968)

b) Analyse der Begriffe Abstraktion und Menge auf der Basis der "Logischen Propädeutik"

Bei dem jetzigen Stande der logischen Propädeutik bliebe im Falle einer auftretenden Meinungsverschiedenheit darüber, ob ein bestimmter Prädikator P einem Gegenstand S zu- oder abzusprechen sei, nur die Möglichkeit, an Beispielen oder Gegenbeispielen den intendierten Gebrauch des Prädikators P zu verdeutlichen. Bisher sind Elementaraussagen nur exemplarisch und damit ersichtlich nicht sehr weitgehend bestimmt, d. h. Meinungsverschiedenheiten im vorher erwähnten Sinn wären letztlich nicht auszuräumen. Da aber der hier diskutierte Versuch als ein linearer methodischer Aufbau einer Wissenschaftssprache verstanden werden will und damit der Erschließung objektiver Bereiche dienen soll, ist eine weitergehende Normierung der Prädikatoren - über die Sprachhandlung des Prädizierens hinaus - vorzunehmen, was durch Einführung von Regeln für den Gebrauch der Prädikatoren geschehen kann: Die Wissenschaftssprache soll interlingual werden.

Schon Aristoteles verwandte solche einfachen Regeln als Grundlage seiner Syllogistik, und zwar legt er zwei Arten von Regeln vor, die affirmativen, die erlauben, von einer Aussage $S \varepsilon P$ zu einer affirmativen Aussage $S \varepsilon Q$ überzugehen, und die negativen, die den Übergang von einer Aussage $S \varepsilon P$ zu einer negativen $S \varepsilon' Q$ gestatten: Der Gebrauch der Prädikatoren P, Q soll also durch Regeln normiert werden.

Lorenzen benutzt in seinem methodischen Aufbau einer Sprache, die als künstliche Sprache neue Möglichkeiten objektiv erschließen und gleichzeitig sich im Gegensatz zu den natürlich gewachsenen Sprachen jederzeit ihrer Leistung bewußt sein will und damit kritisch sein muß,

die exemplarisch eingeführten Prädikatoren als Basis für weitere Untersuchungen. Er bezeichnet jenes System von ersten, vagen Unterscheidungen mit dem Ausdruck "Distinktionsbasis". Es stellt sich also für ihn die Aufgabe, von diesem Ansatzpunkt aus - jenes schon bereitgestellte Baumaterial benutzend - mit den Mitteln der Grundaussagen die projektierte logische Propädeutik, d. h. eine Wissenschaftssprache, methodisch zu errichten.

Die geplante rationale Syntax darf, Lorenzens methodischem Prinzip gemäß, sich nicht auf eine natürliche Syntax berufen. In einem ersten Schritt hierzu werden an Beispielen Prädikatorenregeln eingeführt: Eine solche Regel trägt die Bezeichnung

$$S \varepsilon P \Longrightarrow S \varepsilon Q$$

Diese Regeln sind praktische Anweisungen, von gewissen Elementaraussagen zu anderen überzugehen; als solche gehören sie zu den Bestandteilen der zu konstruierenden Sprache. Der Doppelpfeil $\Longrightarrow$ dient der Mitteilung der Aufforderung, von einer Grundaussage zur anderen überzugehen, und wird ebenfalls exemplarisch eingeführt.

In der Aufstellung eines Regelsystems liegt eine Willkürlichkeit, die Frage nach dem "wahren" Regelsystem vermag auf dieser Stufe des Aufbaus nicht gestellt zu werden, da zu ihrer Beantwortung, will sie als wissenschaftliche gelten, in jedem Fall mit der Aufstellung eines Regelsystems begonnen werden muß.

Genau die Prädikatoren, die durch Verwendungsregeln explizit festgelegt sind, nennt Lorenzen Termini.

Haben zwei Prädikatoren P, Q in einem Regelsystem, d. h.

also die beiden Termini P, Q, eine solche Stelle, daß von S ε P immer der Übergang auf S ε Q und umgekehrt möglich ist, sind sie also - so sagt man - synonym, dann ist diese Eigenschaft eine Äquivalenzrelation im Sinne der Mathematik. Damit liegt eine zweistellige Beziehung, eben die synonym zu sein, innerhalb der Termini eines vorgegebenen Systems mit den folgenden Eigenschaften vor:

1) Der Terminus P ist synonym zu sich selbst.
2) Gilt P synonym zu Q, dann auch Q synonym zu P.
3) Gilt P synonym zu Q und Q synonym zu R, dann auch P synonym zu R.

Den Übergang von den Termini zu den Begriffen vollzieht Lorenzen nun in der Weise, daß er sich auf invariante Aussagen über Termini beschränkt. Genauer meint dies: Wenn zwei Termini P, Q synonym sind und man sich mit Aussagen begnügt, die sowohl über P als auch über Q möglich sind, also von der unterschiedlichen Lautgestalt abgesehen wird, so redet man nicht mehr von den Termini P, Q, sondern von den Begriffen P, Q. Z. B. sagt man jetzt nicht mehr "Die Termini P und Q sind konträr", sondern "Die Begriffe P und Q sind konträr". Damit sind also nicht Begriffe definiert, sondern lediglich eingegrenzt, welche Sätze, in denen das Wort "Begriff" vorkommt, als sinnvoll anzusehen sind. "Begriff" meint also kein Autosemantikon, welches eine selbständige Bedeutung hätte und demnach der Frage hiernach ein Sinn zukäme, sondern vielmehr - in der Lorenzenschen Einführung - ein Synsemantikon. Nur bestimmte Sätze, nämlich genau die vorher erwähnten invarianten, sind als sinnvoll festgelegt.

Die Abstraktion besteht damit in der Handlung des Übergangs von den invarianten Aussagen über P zu den Aussagen über den "Begriff P", von dem in der Rede als abstrakter Gegenstand, als abstractum, gesprochen wird,

aber doch nur im Sinne eines Kunstgriffs zur Anreicherung der Redemöglichkeiten. Lorenzen schließt sich damit der nominalistischen Lösung des Problems der Abstraktion an.

Der eingeschlagene Weg geht, um das Reden von Begriffen zu ermöglichen - das sei zur Verdeutlichung nochmals dargestellt -, von synonymen Termini aus, muß dann Prädikatenprädikate einführen, die, wenn sie für einen Prädikator P gelten, auch für jeden synonymen Prädikator Q zutreffen. Zutreffen und Gelten wird geregelt durch Prädikatorenregeln über synonyme Termini, demnach, wie man auch sagen kann, durch Prädikatorenregeln 2. Stufe. Jene Prädikatenprädikate mögen invariant heißen.

Ein triviales Beispiel eines invarianten Prädikators wäre etwa der zweistellige Prädikator "ist ableitbar aus"; denn wenn P und Q synonyme Termini sind, so läßt sich folgende, in der Umgangssprache ausgedrückte Elementaraussage bilden "P ist ableitbar aus Q" bzw. "Q ist ableitbar aus P", was ja durch die Definition synonymer Termini schon festliegt. Das Reden von Begriffen heißt nichts anderes, als sich auf invariante Prädikatenprädikate zu beschränken, von allem zu abstrahieren, wodurch sich synonyme Prädikatoren unterscheiden. Ist etwa T solch ein invarianter Prädikator über synonyme Prädikatoren P, Q, so ist die Aussage "Der Begriff P ist T" erlaubt.

Das Wesen der Abstraktion liegt damit in der Beschränkung auf invariante Aussagen. Um gerade die Invarianz zum Ausdruck zu bringen, redet man vom Begriff P und nicht mehr vom Terminus P.

Die Einführung der Begriffe findet auf Seiten der Psycho-

logie das folgende Phänomen als Stütze: In einer Umgangssprache kann mit verschiedenen Wörtern dasselbe gemeint sein. Die Abstraktion ist aber keine psychische Operation, sondern muß formal-logisch operativ interpretiert werden. Wenn sie aber nach Lorenzen als Handlung verstanden sein will, die nur durch Übung gelernt werden soll, so klärt sich dennoch ihre eigentümliche Selbstverständlichkeit nicht hinreichend auf. Handeln wird unreflektiert als objektives Verhalten, in objektiver Zeit ablaufend benutzt, es wird nicht nach den Bestimmtheiten, nach den Möglichkeiten des Handelns gefragt.

Die vorliegende Einführung des Begriffs entspricht in der Carnapschen Terminologie der intensionalen Bedeutung eines Terminus. Genauer gesagt, meint dies, daß einem Terminus als intensionale Bedeutung ein Relationsbegriff (im einstelligen Fall ein Klassenbegriff) zugeordnet ist.

Aber auch in einem anderen Sinn wird von der Bedeutung eines Prädikators gesprochen: Es seien P, Q zwei z. B. einstellige Prädikatoren, die nicht notwendig in einem Regelsystem eingeordnet sind. Gilt dann für jedes beliebige x (x steht dabei für einen Eigennamen), daß es immer gleichzeitig möglich ist, x den beiden Prädikatoren P, Q zu- oder abzusprechen, besteht also immer die Möglichkeit, für jedes x $x \varepsilon P$, $x \varepsilon Q$ oder $x \varepsilon' P$, $x \varepsilon' Q$ darzustellen, dann heißen die beiden Prädikatoren extensional gleich.

Diese extensionale Gleichheit stellt wiederum eine im vorliegenden Sinne erwähnte Äquivalenzrelation dar. Von diesen extensional gleichen Prädikaten sagt man nun, sie bedeuten dieselbe Klasse. Veranschaulicht meint eine solche Klasse eine "Zusammenfassung" von Gegenständen x, nämlich von jenen, für die $x \varepsilon P$ zutrifft. Für die er-

wähnten Gegenstände gilt dann natürlich auch $x \varepsilon Q$.

Klassen (oder auch Mengen) sind aber keine konkreten Zusammenfassungen, es handelt sich vielmehr hierbei um abstrakte Gegenstände, die allererst mittels Abstraktion eingeführt werden. Allgemein darf, wenn für vorliegende Gegenstände eine Äquivalenzrelation gilt, durch die Übereinkunft, zwei Gegenstände nur dann als verschieden anzusehen, falls für sie nicht die eingeführte Äquivalenzrelation gilt, übergegangen werden zu einem neuen Objektbereich, der aus dem ursprünglichen durch Abstraktion entstanden ist.

Ordnet man im Sinne H. Weyls [1] in einer vorliegenden Gegenstandskategorie jeder sinnvollen Eigenschaft E(x) eine Menge zu, die Menge der Gegenstände x, welche die Eigenschaft E besitzen, so ist hierbei die Vorstellung fernzuhalten, eine solche Menge wäre durch Kollegieren aus ihren einzelnen Elementen geschaffen. Es soll also das Kennen einer Menge nichts anderes heißen, als daß eine für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft gegeben ist. Nur bei endlichen Mengen besteht die Möglichkeit einer individuellen Beschreibung durch Heraushebung der einzelnen Elemente. Eine Didaktik, die mit endlichen Mengen anhebt, sollte allerdings die vorhergehenden Erörterungen als allgemeine Zielsetzungen ansteuern.

Unter Umständen korrespondiert zwei Eigenschaften die gleiche Menge, nämlich genau dann, wenn jeder Gegenstand, dem die erste Eigenschaft zukommt, auch die zweite Eigenschaft besitzt und umgekehrt. Für die Identität von zwei Mengen erweist sich also im Gegensatz zu den Eigenschaften als nicht entscheidend, wie sie festgelegt sind, son-

1) H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, S. 11 f.

dern von Wichtigkeit ist lediglich der Umstand, ob jedes Element der einen Menge auch Element der anderen Menge ist und umgekehrt.

Die Handlung der Abstraktion heißt also nichts anderes - unter Benutzung der obigen Definition der Menge - als der Übergang von der Eigenschaft zur Menge. Die Überbauung durch Klassen abstrakter Gegenstände läßt sich hiernach allgemein als Mengenbildung kennzeichnen. Man hüte sich aber vor der Meinung, damit die abstrakten Gegenstände konkret erfaßt zu haben; es ist vielmehr umgekehrt so, daß erst durch die dargestellte Abstraktion der Mengenbegriff aufgehellt und vor Mißdeutungen abgesichert wird.

Die vorgeschlagene Methode der "Einübung des Weges" führt tastend auf dieses Ziel hin, aber immer so, daß die nicht platonische Frage "Wie ist das Einzuführende zu gebrauchen?" im Vordergrund steht [1].

c) Die Logik dialogdefiniter Aussagen auf der Basis der "Logischen Propädeutik"

Durch exemplarisches Einüben lassen sich nun die Prädikatoren "wahr" und "falsch" für Elementaraussagen einführen:

(1) $S \in P \Longrightarrow (S \in P) \in$ wahr
(1') $S \in P \Longrightarrow (S \in P) \in$ falsch
(2) $S \in' P \Longrightarrow (S \in' P) \in$ wahr
(2') $S \in' P \Longrightarrow (S \in' P) \in$ falsch

1) Man erinnert sich an die Parallele bei Kant (siehe Teil I). Z. B. führt dieser, das sei schlagwortartig wiederholt, Begriffe als "Regeln der Synthesis in der Anschauung" ein.

In diesem Fall ist also vorausgesetzt, daß wahrheitsdefinite Elementaraussagen vorliegen.

Der Lernende muß den Lehrer befragen, welche der Regeln (1), (1'), (2), (2') für spezielle Elementaraussagen angewandt werden soll. Andererseits muß der Lehrer aus dem gleichen Grunde auch den Schüler befragen. Es liegt also ein gleichberechtigtes Frage-Antwort-Spiel vor, man spricht kurz von einem Dialog. Um diesen aber zu normieren, ihn in einen geregelten Handlungsablauf überzuführen, rationales Argumentieren zu leisten, führt man dialogisch die logischen Partikel $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\neg$, $\bigwedge_x$, $\bigvee_x$, wie schon gezeigt, ein.

Durch das Fallenlassen der platonischen These der wahrheitsdefiniten Aussagen, gelangt man zu den dialogdefiniten Aussagen und erhält somit wiederum Anschluß an den schon geleisteten Aufbau der Logik dialogdefiniter Aussagen mit möglichen Übergängen in die klassische Logik [1].

Ein Moment der Kritik an der philosophischen Basis dieses Unternehmens äußert sich in einem anzugebenden Zitat, auf das allerdings hier nicht näher einzugehen ist. Lorenzens Arbeiten lassen sich interpretieren als der Versuch, in inhaltlichen Sätzen und Handlungen Wissenschaftstheorie, Mathematik und Logik zu gründen. "Die 'Vorschule des vernünftigen Redens', die sich um den methodischen Aufbau dieser Arbeit bemüht, ist aber durch eine transzendentale Kritik zu ergänzen; denn notwendig geht das logische Handeln im Handeln auf; es wird n o t w e n -

1) Als Beitrag zur Behebung der Grundlagenkrise der Mathematik erreicht ein solcher Aufbau eine Vermeidung problematischer Begriffsbildungen wie klassischer Mengenbegriff und unkritische Anwendung des tertium non datur. Ein metamathematischer Überbau entfällt.

d i g positiv und hat in der Positivität seinen Inhalt. Notwendig verstellt sich in diesen Handlungen das Handeln selber; die Subjektivität wird vergessen und verstellt in einer objektiven Gestalt, einem falschen Bewußtsein, insofern die Verstellung nicht durch Kritik gebannt wird" [1].

Der lineare Aufbau der Methode, der im vorwissenschaftlichen Bereich in der Fähigkeit, Handlungen auszuüben und zu erlernen, seine wichtigste Wurzel hat, kommt aber einer Didaktik der Logik und Mathematik zugute.

---

1) L. Eley, a. a. O., S. 375. Die genannte Kritik nennt Eley Metakritik. Um sie bemüht er sich in seiner Arbeit.

Teil III

§ 6. Untersuchungen zu einem operativen Aufbau der Arithmetik und Analysis im Sinne Lorenzens

a) Die Fundierung der Analysis in Handlungen

Die Sicherung der klassischen Analysis läßt sich nach vorherrschender Meinung durch eine totale Kalkülisierung erreichen, innerhalb derer der bisherige Bestand von Sätzen der Analysis ableitbar ist, und zwar nach den Schlußweisen der formalen Logik. Die Rechtfertigung für jenen speziell gewählten Kalkül, d. h. die Begründung für die Wahl eben jenes Kalküls und nicht eines anderen, und darüber hinausgehend die Motivierung für die Beschäftigung mit ihm vermeint die heute vorherrschende Mathematik unter anderem [1] pragmatisch zu leisten: Mit ihm sei die neuzeitliche Mathematik entstanden.

Lorenzen unternimmt den Versuch unter Vermeidung eines jeglichen, den bisherigen Begründungen der Analysis zugrunde liegenden Platonismus und Pragmatismus, den klassischen Bestand in H a n d l u n g e n zu fundieren. Es werden die Basisbereiche wie natürliche Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen und ihre Mengen k o n s t r u i e r t .

Obwohl sich dieses Unternehmen vermöge seines konstitutiven Handlungsprinzips - auf das im vorigen Kapitel ausführlich eingegangen wurde - von der axiomatischen

1) Vergleiche hierzu den wichtigen Aufsatz von P. Lorenzen, Moralische Argumentationen im Grundlagenstreit der Mathematiker, in: Methodisches Denken. Dieser Aufsatz ist wohl bisher von zu wenigen Didaktikern der Mathematik gelesen worden.

Methode unterscheidet, indem die Konstruktion der Objekte als eine Hauptaufgabe angesehen ist, bleibt eine Versöhnung mit der axiomatischen Arbeitsweise möglich, wenn sie sich nicht als purer Formalismus versteht, der auf die Konstruktion eines geeigneten Modells verzichtet.

Der Mathematiker versteht dann erst sein Tun, weil er die Gegenstände seiner Beschäftigung selbst durch Handlungen einführt [1], ein reiner Formalist kann - häretisch gesprochen - als Formalist sein Tun im eigentlichen Sinne nicht verstehen.

Man kann also den Aufbau der Analysis so errichten, daß zuerst einmal die Konstruktion ihrer Objekte erbracht wird, um dann die Zusammenhänge der Sätze weiter aufzuklären, indem die konstruierten Objekte als Modelle gewisser Strukturen (Gruppen, Körper, Verbände usw.) angesehen werden. Die konstruierten Objekte kann man somit als "Repräsentanten" der Strukturen ansehen, sie tragen diese und füllen sie, das sei besonders bemerkt, mit Inhalt.

Für die elementare Arithmetik erweist sich die Frage nach den Begründungsweisen (axiomatisch oder konstruktiv) als überflüssig - wohlgemerkt für die Mathematik, nicht für ihre Didaktik -, denn in einer axiomatisierten Arithmetik vermag man, jeden Satz als Angabe eines Verfahrens zu lesen.

Die Differenz zwischen Formalismus und Lorenzens Konstruktivismus zeigt sich erst wesentlich im Übergang von Arithmetik zur Analysis. Abweichungen entstehen bei der

1) Es bedarf wohl keines besonderen Hinweises, daß man damit die Zustimmung der Lernpsychologen Piaget und Aebli erzielt.

Auffassung des Mengenbegriffs [1], der Einführung der reellen Zahlen, bei einigen Sätzen über reelle Funktionen [2] und solche über mehrdimensionale Bereiche. Da das Fortschreiten von der Arithmetik zur Analysis zur Hauptsache durch die für die weiteren Ausführungen innerhalb der Analysis grundlegende Einführung der reellen Zahlen getragen ist, müssen die Abweichungen schon hierin ihre Ursache finden. In der Tat müssen nämlich zuvor Begriffe wie "Menge" und "Funktion" eingeführt sein. Erklärt man Menge als Abstraktion von Formeln [3], so überträgt sich damit die "Indefinitheit" [4] der möglichen Konstruktionsweisen auf diesen tragenden Begriff. Analoges gilt für den Übergang von Termen (d. h. Aussagen eines Kalküls, in denen Aussagenvariable vorkommen) zu Funktionen.

Der Formalismus versucht, den Einzug der Indefinitheiten abzuwehren, indem der Mengenbegriff als Grundbegriff in der Axiomatisierung der Mengenlehre undefiniert bleibt, d. h. aber verkürzt nichts anderes, als daß umgangssprachliche Naivitäten formalisiert werden. Lorenzen hingegen vermeidet diese Formalisierung durch Eingehen auf mögliche Konstruktionen von Termen, wobei noch angeführt sei, daß die Axiomatisierung dieses Vorgehens genau auf die verzweigte Typentheorie führt.

Ein wichtiges Motiv für die trotzdem nicht-axiomatische Darstellung muß in dem Versuch des klaren Herausstellens

---

1) Eine Analyse dieses Begriffs wurde schon im letzten Kapitel gegeben.
2) Siehe hierzu das Lehrbuch von P. Lorenzen, Differential und Integral, Frankfurt a. M. 1965. In der vorliegenden Arbeit kann es nur um die Herausschälung der Methoden gehen.
3) Der allgemeine Weg wurde ja schon im vorigen Kapitel expliziert. Es sei bemerkt, daß nach Cantor - abweichend hiervon - zur Definition der Abstraktion vorher schon die Definition der Klasse bereitstehen muß.
4) Siehe P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 110 und Differential und Integral

von "Indefinitheiten" gesehen werden.

Die Sätze der klassischen Analysis bleiben erhalten - so läßt sich der konstruktive Aufbau nach Lorenzens Methode charakterisieren -, eben weil die Spaltung der verwendeten Begriffe in indefinite und definite stets berücksichtigt ist.

b) Die operative Methode zum Aufbau der Arithmetik; Wittgensteins Analysen zur "Unerbittlichkeit mathematischer Sätze"

Die Konstruktion der Zahlen [1] beginnt, indem zuerst einmal Ziffern hergestellt werden, etwa in der Form der Strichfolge:

|, ||, |||, ||||, ...

Das hierbei verwendete Verfahren läßt sich in Form eines Kalküls beschreiben:

K Material: |
Variable: n
Anfang: |
Regel: n ⟹ n |

K sei "Strichkalkül" genannt. Als Ziffern, auch Zählzeichen, werden die Figuren von K bezeichnet.

Die Arithmetik interessiert sich aber nicht für Aussagen über Ziffern, d. h., sie will zu Aussagen gelangen, die

1) Es sei an die Reflexionen Kants in Teil I § 1 erinnert. In dem darzustellenden Verfahren liegt eine Realisation vor der Kantischen Zahlauffassung als "Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt". Von Wichtigkeit für das "Verstehen mathematischer Operationen" sind auch die Ausführungen Wittgensteins. Siehe hierzu die erwähnte Dissertation M. Langs, insbesondere die Paragraphen "Bedeutung als Gebrauch" und "Sprachspiel und mathematisches Operieren".

vom speziellen Material - etwa den Strichen oder Steinchen usw. - unabhängig sind. Mit anderen Worten ist die Arithmetik aufzubauen als ein System von Aussagen über die dem Strichkalkül zugrunde liegende geregelte Handlungsform. Sie ist im linearen Aufbau zu konstruieren unter reiner Beachtung des dem Kalkül K immanenten Handlungsschemas.

Hier erinnert man sich an schon geleistete Analysen über das Zählen, die sich in der verkürzten Form zusammenfassen lassen: "Tue etwas, und tue es noch einmal, indem vom schon erhaltenen Resultat auszugehen ist." Mathematik - in dem hier schematisierten Sinne - gründet damit in Handlungsschemata, mathematische Behauptungen betreffen genau diese Schemata, deshalb bedarf sie aber der Übung, und zwar in Notwendigkeit.
"Dieses Zählen und Rechnen ist doch - z. B. - nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (und das heißt: s o zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen; mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf 'eins' 'zwei', auf 'zwei' 'drei' sagen usf." [1].

V e r s t e h e n heißt nichts anderes als sich auf den G e b r a u c h v e r s t e h e n .

Worin gründet die nach allgemeiner Redeweise so oft emphatisch betonte Unerbittlichkeit mathematischer Sätze? Kambartel [2] interpretiert die leider in Mathematikerkreisen meist wohl unbekannten - soweit sie "Formali-

1) L. Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Oxford 1956, I, 4
2) F. Kambartel, Erfahrung und Struktur, S. 214 f.

sten" sind, sogar notwendig ignorierten - Reflexionen Wittgensteins wie folgt:
"Wittgenstein faßt in diesem Sinne alle mathematischen Überlegungen (Beweise) in ihrem Ursprung als 'Bilder' auf. Bei diesen Bildern handelt es sich genauer um frei hervorgebrachte anschauliche Konstruktionshandlungen (wie das Legen von Bohnen, das Zeichnen von Figuren, das Operieren mit Ziffern), die dann etwa zur Deutung von Experimenten verwendet werden. In dem Maße, wie sich Anwendungen eines Bildes finden, erweist sich dieses als mehr oder weniger b r a u c h b a r ." Ein "mathematisches Bild" verstehen heißt, seinen Gebrauch verstehen, und zwar so, daß dieses Verstehen die Bedingung der Möglichkeit in der Anwendung meint. Mit Kant gesprochen, heißt dies: Verstehen eines mathematischen Bildes ist nicht Erfahrung, es ermöglicht vielmehr gewisse Erfahrung.

Nach dieser Auffassung besteht das Betätigungsfeld der Mathematik in solchen Verfahren, die nach einiger Übung keine bezweifelbaren Fälle mehr außerhalb lassen.

M. Lang zeigt in der schon erwähnten Arbeit, wie Wittgenstein seine Auffassung der Grammatik [1] aus den Untersuchungen Freges und Russells über Logik gewinnt. Hiermit wird erst Wittgensteins Angriff auf die vorherrschenden (platonischen) Bedeutungstheorien verständlich.
"In der Mathematik ist a l l e s Algorithmus, n i c h t s Bedeutung; auch dort, wo es so scheint, weil wir mit W o r t e n ü b e r die mathematischen Dinge zu sprechen scheinen. Vielmehr bilden wir dann eben mit diesen Worten einen Algorithmus" [2]. Wittgenstein

1) Siehe hierzu M. Lang, Wittgensteins Philosophische Grammatik
2) L. Wittgenstein, Philosophische Grammatik, Schriften IV, Frankfurt 1969. Aus der Auffassung der Sprache als Kalkül entspringt ihre aufklärende Funktion, siehe M. Langs Arbeit.

formuliert damit seinen Angriff - was hier freilich nur angedeutet sei - gegen die Auffassung der Principia Mathematica als "Weltsystem":

"Ich darf aber doch nur folgern, was wirklich f o l g t ! Soll das heißen: nur das, was den Schlußregeln gemäß f o l g t ; oder soll es heißen: nur das, was s o l c h e n Schlußregeln gemäß folgt, die irgendwie mit der Realität übereinstimmen? Hier schwebt uns in vager Weise vor, daß diese Realität etwas sehr abstraktes, sehr allgemeines und sehr hartes ist. Die Logik ist eine Art von Ultra-Physik, die Beschreibung des 'logischen Baus' der Welt, den wir durch eine Art von Ultra-Erfahrung wahrnehmen (mit dem Verstande etwa)" [1].

Die angedeuteten Untersuchungen behandeln das Selbstverständnis der Mathematik. So wird z. B. die Mengenlehre abgelehnt, weil sie Satzformen als unendliche Gegenstandsbereiche ausgibt [2].

"Dem Mathematiker muß es bei meinen mathematischen Ausführungen grausen, denn seine Schulung hat ihn immer davon abgelenkt, sich Gedanken und Zweifeln, wie ich sie aufrolle, hinzugeben. Er hat sie als etwas Verächtliches ansehen lernen und hat, um eine Analogie aus der Psychoanalyse (dieser Absatz erinnert an Freud) zu gebrauchen, einen Ekel vor diesen Dingen erhalten, wie vor etwas Infantilem. D. h., ich rolle alle jene Probleme auf, die etwa ein Kind beim Lernen der Arithmetik, etc. als Schwierigkeiten empfindet und die der Unterricht unterdrückt, ohne sie zu lösen. Ich sage also zu diesen unterdrückten Zweifeln: ihr habt ganz recht, fragt nur,

1) L. Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, 6
2) In Teil II wurde die Entbehrlichkeit eines solchen Schrittes aufgewiesen.

und verlangt nach Aufklärung!" [1].

Eine Didaktik der Mathematik darf sich aber von diesen Reflexionen nicht "grausend" abwenden, sie hat vielmehr auf sie einzugehen, doch soll dies in dieser Arbeit nicht geschehen; an anderer Stelle wird auf sie zurückzukommen sein.

Der Strichkalkül liefert bisher Aussagen der Art:

| ist Ziffer.

n ist Ziffer —> n | ist Ziffer.

Zu Zahlen gelangt man, wenn von dem betreffenden Material, Farbe usw. der Strichlisten "abgesehen", d. h. wenn der beschriebene Vorgang der Abstraktion durchgeführt wird.

Das geforderte Regelsystem besteht aus der dialogisch oder über geregelte Handlungen begründbaren Logik. Zwei Ziffern m und n sollen dann äquivalent heißen, $m \sim n$, wenn die folgende Bedingung zutrifft:

$\bigwedge_A$ A(m) <—> A(n)

A(m) bzw. A(n) seien beliebige Aussagen über m bzw. n.

Der einzige Unterschied zwischen Ziffern und Zahl liegt dann aber in der Abstraktion, die aber eine logische ist, da sie sich auf Operationen mit Aussagen bezieht. Zahlen sind somit nichts anderes als Redeweisen dafür, daß bei konkreten Ziffern (speziellen Strichlisten usw.) nur auf ihre Eigenschaft, Stationen, Marken für Zählhandlungen zu sein, geachtet ist.

Es sei ausdrücklich betont, daß selbstverständlich Zählen, Ziffern, Zahlen nicht nur über Strichlisten lernbar sind, denn die erwähnten Strichlisten stellen ja nur

1) L. Wittgenstein, Philosophische Grammatik, 381 / 382

eine unter den vielen Möglichkeiten dar, das Ergebnis der Zählhandlung zu fixieren. Für den Strichkalkül sieht dies aber so aus, daß mit einem Strich | begonnen wird, dann fügt man an diesen ersten Strich einen weiteren Strich an: ||; von diesem Ergebnis der Zählhandlung gelangt man zum nächsten durch erneutes "Anhängen" eines Striches: ||| etc.
Diesen Vorgang schreibt man nun kurz durch:

```
  |
n ==> n |
```

Dabei ist n jeweils durch eine nach diesem Regelsystem hergestellte Strichfigur zu ersetzen: n ist Variable im Sinne der Erörterung über geregeltes Handeln in Teil II. ==> ist zu interpretieren als "wenn - dann" nicht im Sinne der Logik, sondern als "handelndes" wenn - dann: "Wenn das Eine hergestellt ist, dann mache so das Andere." Es dient nur der sprachlichen Übermittlung, ist aber in einer Situation des konkreten Vor- und Nachmachens überflüssig.

Der Unterschied zu formalen axiomatischen Theorien kommt hier deutlich ans Licht: Gegenstände werden nicht nach erfolgter impliziten Definition formal beschrieben, sondern konkret erzeugt. Für die Arithmetik heißt dies, daß ihre Gegenstände, die Zahlen, nichts anderes sind als die Stationen der beschriebenen Handlung des Zählens; ihr Sinn geht ganz im Zählprozeß auf. Zahlen sind auf diese Weise primär weder von Gott gemacht, noch Eigenschaften von Mengen. Die Rede von Zahlen stützt sich somit weder auf undefinierte Grundbegriffe noch auf erste unableitbare (im Sinne der Logik) Sätze, die Axiome. Zahlen sind Resultate einer elementaren Handlung.

Der beschriebene Prozeß der Abstraktion kann auch wie folgt ausgeführt werden: Man sieht ab von den konkreten Realisierungen der Ziffern und achtet nur auf das, was suggestiv mit "Länge der Ziffern" bezeichnet sei [1]. Genauer meint dies, man macht nur Aussagen darüber, "wie oft" der Strich | etwa zur Bildung von |||||||| herangezogen werden muß, oder in anderer Schreibweise:
Es werden nur Aussagen darüber gebildet, "wie oft" der Stab ⊢⊣ (entsprechend |) etwa in ⊢⊣⊣⊣⊣ aufgeht. Hiermit läßt sich also ganz zwanglos an die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren von Kirsch [2] anschließen.

Die Vorteile einer solchen Bildung können somit z. B. von Kirsch übernommen werden. Ihre Motivierung ist hier meiner Meinung nach eine allgemeinere und sozusagen - wie bisher ausgearbeitet - auf einer größeren Anzahl Stützen ruhend.

Sicherlich läßt sich der hier vorgeschlagene Weg in der bestehenden Lehrplansituation nicht voll durchführen. Das hindert jedoch nicht daran, daß es für einen Lehrer

1) Es seien m bzw. n zwei Ziffern, hergestellt im "Zählkalkül" K bzw. K'. m und n soll man dann als "gleich lang" (oder äquivalent) bezeichnen, wenn jeweils abwechselnd in m und n ein Grundbaustein weggenommen werden kann und schließlich "gleichzeitig" kein Stein übrigbleibt. Man sage dann: m und n repräsentieren die gleiche Zahl. Damit ist an die beschriebene Ziffernvergleichung des Paragraphen 3 erinnert.

2) Siehe A. Kirsch, Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren, Math. Physik. Semesterberichte, Bd. XVII, Heft 1, S. 57 - 67, (1970). Es sei bemerkt, daß sich die obige Aussage nur auf die Einführung der natürlichen Zahlen bezieht, nicht auf die weitere Behandlung durch Kirsch.

nützlich wäre, ihn zumindest zu kennen [1].

Mitgeteilt seien die Gründe, die nach Wittmann für eine konstruktive Behandlung der natürlichen Zahlen sprechen:

"1. Sie ist mathematisch einwandfrei untermauert und trotzdem außerordentlich einfach.
2. Sie ist sachlich begründet und läßt vor allem den operationalen Charakter der Zahlen klar hervortreten.
3. Sie bedeutet keine abrupte Abkehr von den traditionellen Verfahren, sondern präzisiert sie eher. Insbesondere steht sie den bewährten 'operativen' Verfahren (im Sinne von Piaget) sehr nahe.
4. Die Begriffsbildung ist intensional.
5. Übergänge zum Modell von A. Kirsch und zur mengentheoretischen Interpretation der Zahlen ergeben sich zwanglos." [2]

Wittmann führt Zahlen unabhängig von Mengen ein und liefert erst nachträglich die Verbindung zwischen Mengen- und Zahloperationen.

Es sei noch bemerkt, daß man die Einführung der Brüche nach Kirsch deuten kann als Aufnahme des historischen Weges ihrer Einführung durch Messung. Doch sei hierauf nicht weiter eingegangen.

A(|), A(||), A(|||), ... seien irgendwelche Aussagen über Ziffern (Zahlen), so daß gilt (selbstverständlich hier im Sinne der operativen oder dialogischen Begründung):

---

1) Siehe hierzu auch R. Inhetveen, Naive und konstruktive Mengenlehre in der Schule, und den grundlegenden Aufsatz von E. Wittmann, Die Mengenlehre und der Mathematikunterricht in der Grundschule. Beide Aufsätze sind enthalten in: Mengenlehre im Unterricht. Zu ihrer didaktischen Relevanz, Der Mathematikunterricht, Jhrg. 17, Heft 1, 1970.

2) E. Wittmann, a. a. O., S. 43 f.

$A(|)$

$\bigwedge_m A(m) \longrightarrow A(m\,|)$

Dann gilt auch

$\bigwedge_n A(n)$

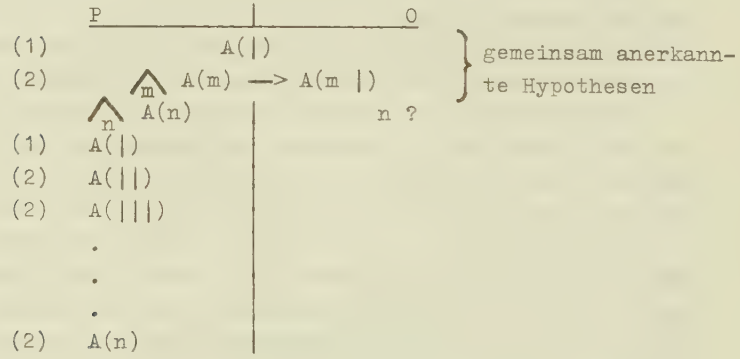
Wenn ein beliebiges n vorgelegt ist, dann ergibt sich n aus der schrittweisen Konstruktion:

$|,\ ||,\ |||,\ \ldots,\ n$

Interpretiert man den Junktor $\longrightarrow$ operativ, so erhält man die Gültigkeit von $A(n)$ auf die gleiche Weise wie die Ziffer n:

$A(|),\ A(||),\ A(|||),\ \ldots,\ A(n)$

In Dialogform heißt dies:



Damit gewinnt das Induktionsprinzip eine dialogische (operative) Begründung unter Benutzung der Konstruktion der Variablen n in $\bigwedge_n$ als Zählzeichen und somit zugleich eine neue Inhaltlichkeit, während es ja in einem formalistischen (axiomatischen) Aufbau als Axiom angesetzt wird. Das Induktionsprinzip, das als das der Arithmetik zugrunde liegende "synthetische" Prinzip anzusehen ist, erhält dadurch also eine dialogische Rechtfertigung, wenn man hinzunimmt, daß die Variablen Ziffern sind. Hiermit kommt sozusagen die arithmetische Komponente ins Spiel.

Zu gültigen Gleichheitsaussagen gelangt man über die Regeln:

$| = |$

$m = n \Longrightarrow m | = n |$

Es gilt hiernach: $m | = n | \longrightarrow m = n$

Dies folgt aus dem Inversionsprinzip oder aber auch direkt, denn wenn $m | = n |$ konstruierbar ist, muß als Schritt vorher $m = n$ erzeugt sein [1].

Durch Festsetzung von $m \neq n$ durch $\neg\, m = n$ ergibt sich

$\bigwedge_m\, m | \neq |$

(1) $|$ ist Zahl

n ist Zahl $\longrightarrow n |$ ist Zahl

(2) $A(|) \wedge \bigwedge_m A(m) \longrightarrow A(m |) \overset{\bullet}{\longrightarrow} \bigwedge_n A(n)$

(3) $\bigwedge_m\, m | = n | \longrightarrow m = n$

(4) $\bigwedge_m\, m | \neq |$

In einem axiomatischen Aufbau trägt das System (1) bis (4) den Namen "Peano-Axiome". Hier werden sie aus der Gründfähigkeit des geregelten Handelns gewonnen.

Als nächstes soll noch kurz das Verfahren der Addition und Multiplikation von bisher konstruierbaren Zahlen angegeben sein:

$\frac{m + n}{p}$ bzw. $\frac{m \cdot n}{p}$ seien die Schreibweisen für das Resultat der Addition bzw. Multiplikation von m und n.

Addition: $\frac{m + |}{m |}$ Anfang

$\frac{m + n}{p} \Longrightarrow \frac{m + n |}{p |}$

Multiplikation: $\frac{| \cdot n}{n}$ Anfang

$\frac{m \cdot n}{p}, \frac{p + n}{q} \Longrightarrow \frac{m | \cdot n}{q}$

---

1) Mit Hilfe des Induktionsprinzips kann folgende Aussage gewonnen werden: $m = n \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} \bigwedge_A A(m) \longleftrightarrow A(n)$
Siehe P. Lorenzen, Differential und Integral, S. 9 ff.

Als Terme, genauer arithmetische Terme, bezeichnet man Figuren (Erzeugnisse), die mit Hilfe von + und · aus dem Grundbaustein (Konstante) | und den Variablen gebildet sind. Z. B. $(m + n) \cdot | + n \cdot (m + |)$. Durch die Vereinbarung 1 statt |, 2 statt 1 + 1, 3 statt 2 + 1, etc. läßt sich die übliche Dezimalschreibweise [1] einführen. Hierdurch werden "längere" Strichfiguren übersichtlicher und für das menschliche Gedächtnis besser geeignet als die Figuren des Strichkalküls.

Arithmetische Grundaussagen heißen die bisherigen Gleichungen und Ungleichungen [2]. Als arithmetische Aussagen bezeichnet man logische - d. h. unter Verwendung der Junktoren - Zusammensetzungen von Gleichungen und Ungleichungen zwischen Termen, unter der Zusatzbedingung, daß sie keine freien Variablen enthalten.

Werden in einer (arithmetischen) Aussage beliebige Konstante durch Variable ersetzt, so entstehen Aussageformen: z. B. $\bigwedge_t t \leq s + t, r \cdot t = t \cdot r$. Aussagen und Aussageformen heißen Formeln.
A(x) meint dann die Formel, bei der nur x freie Variable ist.
Zwei Formeln A(x), B(x) heißen dann äquivalent, wenn gilt: $\bigwedge_x A(x) \longleftrightarrow B(x)$
$\bigwedge_x$ meint: "für alle Objekte des Variabilitätsbereichs".
Die definierte Relation zwischen A(x), B(x) ist eine Äquivalenzrelation im anderen Orts definierten Sinn. Man sagt dann, daß die äquivalenten Formeln die gleiche Menge darstellen [3]. Als Bezeichnung sei nun eingeführt

1) Für den Vorteil der Dezimalschreibweise siehe H. Hermes, Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, S. 6
2) Siehe hierzu P. Lorenzen, Differential und Integral, S. 19
3) Siehe hierzu den ausführlichen Teil dieser Arbeit in Teil II.

$\varepsilon_x A(x) = \varepsilon_x B(x)$. Die Elementrelation ε wird definiert durch

$$z \; \varepsilon_x A(x) \longleftrightarrow A(z)$$

Die gesamte Diskussion sei hier nicht wieder aufgerollt.

Eine axiomatische Mengenlehre muß als entscheidender Unterschied zu einem konstruktiven Aufbau das Komprehensionsaxiom fordern. Der Vorteil eines konstruktiven (operativen) Aufbaus für eine Didaktik zeigt sich auch wieder an dieser Stelle:
Man geht nicht von undefinierten Grundbegriffen und Sätzen aus, sondern handelt mit nach Regeln hergestellten Selbsterzeugnissen [1]. Eine Konstruktion erfolgt aber stets schrittweise und kommt damit dem Verstehensprozeß des Lernenden entgegen.

Der Weg zu Funktionen führt über Terme. Zwei Terme F(x), G(x), mit der einzigen Variablen x, heißen äquivalent, wenn

$$F(t) = G(t) \text{ für alle } t$$

gilt. Dies ist wieder eine Äquivalenzrelation. Beschränkt man sich in Aussagen über Terme auf solche, die invariant gegenüber der Ersetzung durch äquivalente Terme sind, so spricht man von Funktionen. Äquivalente Terme stellen dieselbe Funktion dar. Funktionen sind wie alle Abstraktionsergebnisse Redevereinbarungen. Funktion ist also ohne Verwendung von Junktoren hergestellt worden, während bei der arithmetischen Einführung der Menge auch logische Partikel zur Anwendung kommen. Es sei bemerkt, daß in dem allgemeinen Ansatz des II. Teils sich dort die Menge ohne

1) Selbstverständlich müssen für eine schülergemäße Darbietung empirische Schulversuche folgen. Doch soll dies hier nicht zur Sprache kommen. Diese Arbeit versteht sich als immanente Reflexion eines konstruktiven Aufbaus der Mathematik, insbesondere des Lorenzenschen Vorschlags hierzu.

Benutzung von logischen Partikeln einführen läßt. Für den weiteren Aufbau muß an die angegebene Literatur verwiesen werden, da in dieser Arbeit nur die Methode einer Erläuterung zu unterziehen ist.

Teil IV

§ 7. Analysen zur operativen Behandlung der Geometrie

Thema dieses Teils ist nicht eine Geometrie analytischen oder synthetischen Aufbaus, denn sie kann als logisch - arithmetische Theorie angesehen werden. Im folgenden soll vielmehr jene Geometrie behandelt werden, um die seit Aufkommen der allgemeinen Relativitätstheorie ein heftiger Streit entbrannte.

Geometrie nicht als Erkenntnis, sondern als Tat lautet mit Dingler [1] der Titel dieses Teils, wodurch nicht nur eine weitere Aufklärung des Operationsbegriffs für selbsterzeugte Symbole, wie er im zweiten Teil behandelt wurde, hervortritt, sondern zugleich eine Aufhellung des Operationsbegriffs in der Geometrie angestrebt ist. Genauer gesagt, kommt die Begründung der Geometrie durch Lorenzen zur Sprache [2]. Im Anschluß hieran soll dann die Rolle des Handlungsbegriffs (Operationsbegriffs) im Gedankensystem H. Dinglers analysiert werden, da Lorenzen sich zu seiner Formulierung ausdrücklich auf diesen Forscher beruft und damit wiederum in vorzunehmenden Unterscheidungen zu Dingler die schrittweise Klärung weitergetrieben wird.

---

1) H. Dingler, Die Grundlagen der Geometrie. Ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik, Stuttgart 1933, S. III

2) Siehe hierzu insbesondere die beiden Aufsätze "Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung" und "Wie ist die Objektivität der Physik" in: P. Lorenzen, Methodisches Denken, Frankfurt a. M. 1968

a) Begründung der Geometrie durch Lorenzen

Zum Verständnis des Hintergrundes des Begründungsversuchs der Geometrie von Lorenzen dient die Darstellung des schematischen Aufbaus einer physikalischen Theorie (insbesondere der Mechanik) nach Mittelstaedt [1]. Die Theorie erwächst danach aus einem vorwissenschaftlichen Erfahrungsfundus über Begriffe, apodiktische Sätze, Erfahrung und empirische Sätze mit gegenseitigen Beeinflussungen. "Die vollständige Mechanik als Theorie macht empirisch überprüfbare, quantitative Aussagen über alle mechanischen Vorgänge. Um einen systematischen Aufbau der Theorie zu ermöglichen, wollen wir stets von der methodischen Forderung ausgehen, daß auch die die Begriffe definierenden Meßvorgänge - als physikalische Vorgänge betrachtet - selbst Gegenstände der Mechanik sind. Man kann natürlich auch diese Meßvorgänge im Rahmen der theoretischen Mechanik behandeln und insbesondere die Frage untersuchen, ob die qualitativen Eigenschaften, die zur Formulierung der Meßvorschriften der vorwissenschaftlichen Erfahrung entnommen wurden, auch auf Grund der vollständigen Theorie vorliegen. Diese Eigenschaft, die als Selbstkonsistenz der betreffenden Theorie bezeichnet werden soll, liegt in der klassischen Mechanik vor" [2].

Eine Geometrie des dreidimensionalen physikalischen Raumes kann bestimmt werden als eine Theorie, die mit Hilfe von wohldefinierten Meßstäben räumliche Abmessungen untersucht. Damit gründet jede Messung in Längenmessung, die wiederum auf dem Kongruenzbegriff als einem geometrischen Begriff fußt. Die Begründung einer Geometrie hängt in diesem Sinne mit einer solchen der Physik zusammen. Hierdurch ist das folgende Zitat Lorenzens verständ-

1) P. Mittelstaedt, Klassische Mechanik, Mannheim 1970
2) P. Mittelstaedt, a. a. O., S. 17

lich: "Ich möchte dieses Gebiet, das von der Mathematik aus gesehen die ersten Schritte enthält, die getan werden müssen, ehe man physikalische Messungen anstellen kann, Protophysik nennen" [1] und weiter: "Innerhalb der Protophysik steht die Geometrie an erster Stelle". Man erinnert sich an die Rolle der Protologik.

Lorenzens Intentionen richten sich auf eine apriorische Begründung der euklidischen Geometrie. Die angegebene Normierung des Meßprozesses als Handlungsschema durch Festsetzungen der Maßstäbe bedingt die apriorische Gültigkeit der euklidischen Geometrie. Sie besteht aus Grundformen wie "Ebene", "Gerade", "parallel", "orthogonal" usw.

Der operative Ansatz in der euklidischen Geometrie liegt nun darin, durch Forderungen ("ideative Normen") [2] die Handlung der fortschreitenden Realisierung geometrischer Grundformen zu leiten. Hierdurch soll die wiederholbare Herstellung der Grundformen geleistet, kontrollierbar und die Meßhandlung ermöglicht werden. Die normative Handlungsvorschrift zur Festlegung der geometrischen Grundformen darf deshalb keine besonderen Umstände wie Materialbedingungen in sich aufnehmen.

In der "logischen Propädeutik" sind gemäß dem Programm einer "Vorschule des vernünftigen Redens" Prädikatoren exemplarisch einzuführen. Lorenzen verneint die Frage nach der exemplarischen Einführung der für die Geometrie grundlegenden Prädikatoren wie "Ebene", "Gerade" usw. "Nehmen wir etwa einen Ziegelstein, so sind seine Seiten keine Stücke von Ebenen, seine Kanten sind keine Stücke von Geraden und seine Ecken sind keine Punkte. Auch bei größter feinmechanischer Präzision sind die Ecken, Kan-

1) P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 148
2) Diese Begriffsbildung stammt von Lorenzen.

ten und Seiten eines realen Körpers immer nur 'unvollkommene' Realisierungen von Punkten, Geraden und Ebenen" [1].

Ähnlich hierzu stimmen auch nach Platon die geometrischen Formen mit denen wirklicher Körper nur unvollkommen überein. Ihre exakte Geltung in der Erfahrung muß Platon aus Gründen seiner Ideenlehre verneinen, das Anwendungsproblem existiert für ihn nicht. [2]

Lorenzen findet sich in Übereinstimmung mit Kant, für den geometrische Figuren nicht in der Wirklichkeit vorkommen, da sie nur Bilder der zugehörigen mathematischen Begriffsbildungen sind. Die in der Wirklichkeit realisierten Figuren geometrischer Formen entspringen der produktiven Einbildungskraft als empirisches Vermögen. Die bloßen Formen selbst sind in der reinen Anschauung angesiedelt. Aus der Differenz von reiner und sinnlicher Anschauung ergibt sich die entsprechende von Bild und reiner Form. Die Bilder zeigen sich nach Kant als Gegenstände der empirischen Anschauung, belastet mit einer diesbezüglichen Unvollkommenheit. Ihre volle Allgemeinheit, ihre Vollkommenheit erhalten sie erst als Gegenstände der reinen Anschauung, als geometrische Begriffe.

Von diesen Überlegungen unterscheidet sich nun das Vorgehen Lorenzens. Er beginnt mit einer Einführung des Prädikators "Körper" für Dinge wie Steine, Ziegel, Tiere, Menschen, Stühle usw. An ihnen führt man exemplarisch die mehr oder weniger deutlichen Unterscheidungen Seiten, Kanten und Ecken ein, ebenso eben und gerade. Damit liegt also ein vorgeometrisches Vokabular, protogeometrische Prädikatoren vor. Zu protogeometrischen Relationen wie die entscheidenden "orthogonal" $\perp$ und "parallel" $\parallel$

1) Kamlah - Lorenzen, Logische Propädeutik, S. 226
2) Platon, Timaios 50 B

führt ebenfalls der Weg exemplarischer Einübung. "Z. B. sind die benachbarten Seiten eines Ziegels orthogonal zueinander, die nicht-benachbarten Seiten parallel" [1]. Hiermit lassen sich nun vorgeometrische Sätze aufstellen wie z. B. "Wenn von zwei parallelen ebenen Seiten die eine zu einer dritten ebenen Seite orthogonal ist, dann auch die andere" [2].

Die Hilbertschen Axiome der Geometrie wären mit Hilfe solcher Prädikatoren und Prädikatorenregeln einführbar, aber doch bisher stets nur so, daß ihre Fundierung lediglich exemplarisch aufgewiesen ist und damit der Unvollkommenheit verhaftet bleibt. Aus diesen Analysen wird es deshalb verständlich, wenn Lorenzen die Handlung der Herstellung geometrischer Grundformen unter der Leitung einer ideativen Norm sich vollziehen läßt.

Die Unvollkommenheit vorgeometrischer Gebilde wie Seite, Kante und Ecke erlangt ihre Vollkommenheit im Blick auf das Schema, das ihren erzeugenden Handlungen zugrunde liegt. Lorenzen will also die volle Allgemeinheit geometrischer Gebilde nicht mit Kant unter Einbeziehung der reinen Anschauung erzielen, sondern in Kants Terminologie gesprochen, im Felde der empirischen Vermöglichkeiten der Einbildungskraft: durch das Verfahren der Herstellung geometrischer Geräte. Sie bleiben zwar als wirkliche Körper stets unvollkommen, doch ihre approximativ [3] fortschreitende Realisierung hat sich zu orientieren an Normen, die Lorenzen genauer als Homogenitätsforderung [4] oder Forderung der Ununterscheidbarkeit bezeichnet.

---

1) Kamlah - Lorenzen, Logische Propädeutik, S. 227
2) Kamlah - Lorenzen, a. a. O., S. 227
3) Dies freilich wird ein "Anhänger" der allgemeinen Relativitätstheorie leugnen.
4) Z. B. P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 51

Euklid definiert die "Gerade" als eine Linie, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt (Def. 4) und die Ebene als eine Fläche, die gleichmäßig zu den Geraden auf ihr liegt. Lorenzen präzisiert die qualitativen Symmetrieaussagen - so jedenfalls kann man sein Vorgehen interpretieren - zu der Forderung der Ununterscheidbarkeit der Teilstücke der Ebene untereinander und der beiden Seiten voneinander. Dies soll sich ausdrücken in Invarianzbedingungen für Aussagen:
"Gilt eine Aussage A(E, P) über eine Ebene E und einen ihrer Punkte P, so soll für jeden anderen ihrer Punkte P' die Aussage A(E, P') gelten. Für die Ebene wird also ein Homogenitätsprinzip gefordert:

$$P \varepsilon E \wedge P' \varepsilon E \wedge A(E, P) \longrightarrow A(E, P')" \ ^{1)}$$

Zur Verdeutlichung sei bemerkt, daß man vorweg die folgende metasprachliche Substitutionsregel aufstellt, die in Übereinstimmung mit dem Leibnizschen Prinzip identitatis indiscernibilium ist:

$$P \varepsilon E,\ P' \varepsilon E,\ A(E, P) \Longrightarrow A(E, P')$$

d. h., liegt P in der Oberfläche E und P' in der Oberfläche E und gilt weiterhin die Aussage A über P und E, dann soll auch die Aussage A über E und P' gelten [2].

1) P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 51
2) P. Janich zeigt in "Wie empirisch ist die Physik?" philosophia naturalis Bd. 13 die Abhängigkeit der Homogenität von den bereitgestellten Aussagenmitteln. Hier soll ausdrücklich bemerkt sein, daß außerhalb dieser Arbeit beabsichtigt ist, näher auf eine Verwendung moderner linguistischer Analysen für eine Didaktik der Mathematik einzugehen. Erwähnt seien schon an dieser Stelle die Untersuchungen von M. Bierwisch über die Raumstruktur in deutschen Adjektiven in seinem Aufsatz: Einige semantische Universalien in deutschen Adjektiven, abgedruckt in: Vorschläge für eine strukturale Grammatik des Deutschen, herausgegeben von Hugo Steger, Darmstadt 1970. Die Kenntnis der Bevorzugung gewisser geometrischer Strukturen in der Sprache sollte von einer Didaktik der Geometrie berücksichtigt werden.

Dieses Prinzip fordert zur Herstellung immer flacherer, ununterscheidbarer Flächen auf. Es kann gelesen werden als Imperativ: "beseitige fortgesetzt Unterscheidungen". Das Homogenitätsprinzip hat damit einen iterativen, imperativen Charakter.

Bis heute ist allerdings die vollständige logische Ableitung [1] der euklidischen Axiome aus den Homogenitätsprinzipien [2] noch nicht gelungen. Wenn dies gelingen sollte, gründeten damit die euklidischen Axiome in dem einzigen operativen Prinzip der fortgesetzten Beseitigung von Ununterscheidbarkeiten. Es könnte aber auch jetzt schon die vorliegende Methode in einer Didaktik zur Anwendung gelangen, denn sie hat unter anderem ja den Vorteil, daß sie sich - grob gesagt - auf "etwas stützt, was wir immer schon tun".

Das Homogenitätsprinzip darf als terminologische Festlegung der vormals nur vorgeometrisch eingeführten geometrischen Grundformen und Grundrelationen gelten.

Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist auch eine Aussage Janichs über eine approximative Verbesserung der Realisate: "Gemäß einer Handlungsanweisung wird ein erstes Realisat erzeugt. Handlungsanweisungen seien also schon aufgestellt, und somit können auch schon Sätze aus ihnen abgeleitet werden. Diese sind daraufhin prüfbar, ob das vorliegende Realisat ihnen genügt oder nicht. Ein Realisat heiße gegenüber einem anderen besser, wenn ein Satz der Theorie angegeben wird, der im Rahmen der gerade realisierten Genauigkeit vom besseren Realisat erfüllt, vom schlechteren nicht erfüllt ist." Es gilt dann,

---

1) Die sogenannten topologischen Axiome seien hier ausgenommen.
2) Zu den weiteren Homogenitätsprinzipien für die Parallelität, Orthogonalität, Geraden, siehe P. Lorenzen, Methodisches Denken, S. 134 ff.

"daß die Überprüfungsverfahren zur Feststellung unterschiedlicher Realisierungsgüte keiner Meßgeräte bedürfen" [1].

Da die Homogenitätsforderungen nur ideative Setzungen sind, die zu einer ständigen Iteration auffordern, läßt sich die Behauptung, ein vollkommenes Realisat liege vor, nicht in einem endlichen Dialog verteidigen.

Die von Lorenzen im Anschluß an Dingler beabsichtigte (euklidische) Geometrie versteht ihren operativen Ansatz als Versuch, Naturkörpern gewisse Formen vorzuschreiben, um so erst eine jede Messung und damit Physik zu ermöglichen.

In Helmholtz [2] muß wohl der erste gesehen werden, der beabsichtigte, den für eine physikalische Begründung der Geometrie so entscheidenden Begriff des Abstandes zum Fundament einer (empirischen) Geometrie zu machen. Zur Messung der Distanz zweier Punkte bedarf es aber des starren Maßstabes. Die Starrheit selbst läßt sich aber nicht physikalisch überprüfen. Um einen Zirkel zu vermeiden, ist die Starrheit nach Dingler - Lorenzen geometrisch zu definieren. Ausgehend von den durch Homogenitätsprinzipien operativ geforderten Begriffen wie Orthogonalität und Parallelität formuliert man nämlich den entscheidenden Begriff der Kongruenz: Zwei Punktepaare heißen dann kongruent, wenn es ein drittes Punktepaar gibt, das zu jedem der beiden Punktepaare entweder parallel oder spiegelungskongruent ist.

---

1) P. Janich, Die Protophysik der Zeit, Mannheim 1969, S. 47

2) H. Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften u. d. Georg-Augustus-Universität 1868. Auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu Riemanns berühmten "Hypothesen" soll hier nicht eingegangen werden.

Die geometrische Starrheit eines Körpers definiert man dann durch die Forderung, daß jedes auf ihm markierte Punktepaar durch eine Bewegung stets nur in ein zu ihm kongruentes Punktepaar übergeht. Gerade diese freie Beweglichkeit ist aber physikalisch im Anschluß an die Schöpfung der allgemeinen Relativitätstheorie problematisch und von Seiten der Physiker als Angriff auf das Lorenzensche Unternehmen der Versöhnung von Theorie und Praxis benutzt worden. Völlig unproblematisch bleibt sie allerdings für eine klassische Mechanik:
"Die in der Geometrie behaupteten Zusammenhänge stimmen exakt mit denjenigen empirischen Sachverhalten überein, die sich durch Ausmessung wirklicher Körper ergeben" [1].
Damit sind also Evidenz und Gültigkeit in der Erfahrung problematisch geworden.

Der Lösungsversuch von Dingler - Lorenzen läßt sich zusammenfassen in der folgenden Aussage: Das eigentliche Fundament sind nicht die geometrischen Grundbegriffe, sondern gewisse ideelle Konstruktionsvorschriften, die erst die Konstruktion der den Grundbegriffen im Raume der Anschauung entsprechenden Grundgebilde ermöglichen. Die Evidenz der Axiome wird somit erläutert durch die Evidenz der ihnen zugrunde liegenden Konstruktionen. Damit hat sich die Problematik verschoben. Zu ihrer Lösung muß also angenommen werden, daß aus jenem aktiven Bereich, aus dem die Grundkonstruktionen fließen, eine Sicherheit resultiert, die freilich nicht die Sicherheit deduktiver Aussagen ist.

Was als vorwissenschaftliches Wissen - qualitatives Wissen - zur Realisation der Konstruktionen in Gegenständen der Erfahrung gefordert werden muß, ist, wie man oben

1) P. Mittelstaedt, Philosophische Probleme der modernen Physik, S. 45

sah, die unbeschränkte Beweglichkeit der Gegenstände der Erfahrung, die sicherlich im täglichen Leben gilt. Nun wird aber jene Beweglichkeit im physikalischen Rahmen der Theorie des Führungsfeldes untersucht, und es ergibt sich in jener quantitativ und qualitativ genaueren, d. h. experimentell gestützteren Theorie die nur beschränkte Beweglichkeit der Gegenstände der Erfahrung. Damit ist aber die uneingeschränkte Anwendung der euklidischen Geometrie auf a l l e Gegenstände der Erfahrung hinfällig.

Mittelstaedt [1] sieht die beiden Konsequenzen für eine empirische Geometrie:

1) Man verzichtet auf eine konstruktive Definition der Grundbegriffe. An ihre Stelle setzt man empirisch gegebene Maßstäbe - etwa Lichtstrahlen. "Die mit diesen Maßstäben ausgemessenen Beziehungen zwischen den Lagen und den Abmessungen materieller Körper interpretiert man dann als die Sätze einer empirischen Geometrie" [2]. Diese Auffassung ist in Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie auch wirklich durchgeführt worden. Sie verzichtet also auf eine apriorische Geometrie.
2) Man geht aus von einer apriorisch begründeten euklidischen Geometrie, d. h. von einer auf vorwissenschaftlichen Erfahrungen beruhenden (Dingler, Lorenzen). Die mit diesen Mitteln beschriebene Theorie des Führungsfeldes hat dann aber die Eigenschaft der beschränkten Beweglichkeit. Diese qualitative Eigenschaft wird als höherstufiges "vorwissenschaftliches" Wissen zur Grundlage der Frage nach der Realisierbarkeit möglicher Geometrien angesetzt und als Ergebnis so die Riemannsche Geometrie erhalten. Der zweite Weg

1) P. Mittelstaedt, a. a. O., S. 47 f.
2) P. Mittelstaedt, a. a. O., S. 47

führt also auf methodisch anderer Weise als der erste dazu, daß nur die Riemannsche Geometrie uneingeschränkt für alle Gegenstände der Erfahrung anwendbar ist. In Erddimensionen gilt aber auch dann in der Wirklichkeit die euklidische Geometrie.

Man erkennt hier also deutlich, daß eine Reflexion über die Geometrie, will diese sich nicht als inhaltleeres Spiel verstehen, die Physik miteinzubeziehen hat. Der Lorenzensche operative Begründungsversuch der Geometrie, der ja die Kluft zwischen Theorie und Praxis überbrücken will, gelangt zwangsläufig in diesen Problembereich.

b) Kurze Darstellung der Dinglerschen Methode; Handlung als Stütze seines Systems

Euklidische Geometrie, Arithmetik, Mechanik gelten für Dingler als von der Tradition übermittelte exakte Wissenschaften; exakt, weil in ihrem Gefüge sich jeder Satz auf mindestens einen vorhergehenden gründet und an ihrem Beginn ein erstes Fundament, die Axiome, stehen. Sie stellen also ein lineares deduktives Ordnungsgefüge dar, und damit richtet sich die Frage nach der Begründung jener Wissenschaften sofort auf das Problem der Geltung der Axiome. Nimmt man die Axiome als freie Setzungen, so wird das obige Ordnungsgefüge zu einem hypothetischen Formalismus, dessen Berechtigung in sich ruht.

Dingler unternimmt nun den Versuch, in den Bereich, der vor jener als evident angesehenen oder eben nur gesetzten Basis liegt, zu gelangen. Für ihn wird damit die Frage zum Problem, welches die Quelle ist, aus der die Axiome ihre eindeutige Sicherheit beziehen.

Jenes Geltungsproblem für die exakten Wissenschaften wird im "Grundriß der methodischen Philosophie" 1949 noch ausgedehnt auf die nicht mehr neue Aufgabe, "einen sicheren Boden zu finden für die Ordnung unseres Lebens, einen festen Grund, um unser Denken und Handeln darauf zu bauen". Für Dingler wird somit von Wichtigkeit, ja zur "Kernaufgabe" der Wissenschaft, das Problem der Sicherheit zu lösen. Er muß allerdings, und das folgt sofort aus dieser Zielsetzung, einem herbeieilenden Opponenten das Recht zubilligen, jeden vermeintlichen Lösungsversuch auf seine Stichhaltigkeit zu untersuchen. Doch da beginnen schon die Schwierigkeiten: Der Opponent benötigt, um seinem kritischen Auftrag gerecht zu werden, selbst schon absolut sichere Mittel, die aber doch notwendig erst dann vorhanden sein können, wenn für das Kernproblem eine Lösung gefunden ist. Umgekehrt aber ist die kritische Funktion des Opponenten notwendig, um dem Proponenten erst die Lösung des Kernproblems zu ermöglichen.

Dinglers Intentionen müssen sich also zumindest an diesem Einwand bewähren, wenn er sich die Aufgabe stellt, eine exakte Wissenschaft vom erkenntnistheoretischen Nullpunkt aus, d. h. von letzten, nicht mehr hinterfragbaren Wurzeln her aufzubauen und sie absolut zu sichern.

Wenn Hilbert in den "Grundlagen der Geometrie" zu Beginn seiner Untersuchungen Axiome aufstellt, und zwar unvermittelt, was für ihn aus "Gründen der mathematischen Strenge" geschieht, so ist dennoch hiermit nicht ausgeschlossen, den voraxiomatischen Bereich einer zwingenden Behandlung zu unterziehen. Freilich kann die hierzu benutzte Methode nicht mehr die axiomatische sein. Hilbert schneidet, um einem unendlichen Regreß der Begründungen von Allgemeinaussagen zu entgehen, die Verkettung der

Aussagen an einer - natürlich endlichen - Stelle ab und gelangt so zu den Axiomen, von denen im Unterschied zu Euklid, der sie für einleuchtende Prinzipien [1] hält, keine Begründung gefordert wird: Sie sind das, als was sie gesetzt sind.

Gegen die Berufung auf Evidenz als Lösung dieses speziellen Geltungsproblems führt Dingler wesentlich zwei Punkte an:

1) Das unerklärliche Vermögen des Geistes, absolut geltende Allgemeinaussagen zu erkennen. Mit ihm wäre dann ein wichtiger Teil des Erkenntnisproblems in einen nicht mehr aufzeigbaren Bereich entrückt.
2) Müßte eine unerklärliche Übereinstimmung sämtlicher Einzelindividuen hinsichtlich ihrer Evidenzerlebnisse angenommen werden, um so eine kollektive Wissenschaft zu gewinnen.

Die Anwendung des Evidenzbegriffes bedingt damit, daß zwei der wichtigsten philosophischen Grundprobleme, die Probleme des Grundes und der Objektivität der Erkenntnis in das Gebiet des prinzipiell Unerkennbaren gerückt sind.

Einen weiteren Weg zur Sicherung wissenschaftlicher Aussagen birgt der Empirismus. Nun bestreitet aber Dingler mit aller Schärfe, Erfahrung sei eine hinreichende Basis für die Geltung naturwissenschaftlicher Gesetze, die doch stets Allgemeines aussagen. Die Anwendung des Prinzips der Induktion hat für ihn stets die Behauptung im Rücken, in der Natur sei greifbares und griffbereites Erkenntnishaftes unmittelbar vorhanden; es setzt die dogmatische Behauptung der für unsere menschlichen Erkenntniszwecke eigens hergerichteten inneren Beschaffen-

1) Siehe hierzu die genaueren Untersuchungen in Teil I der Arbeit.

heit der Natur voraus oder, wie Dingler sich in seiner oft recht plastischen Sprache ausdrückt, "das rationale Vorgekautsein der Speise, damit sie für unsere geistige Verdauung zubereitet sei" [1]. Jede induktive Wissenschaft schwebt also schon in ihren Fundamenten über einer Begründungslücke. Für Dingler liegt hier der typische Fall einer qualitas occulta vor: sie ist bei Verwendung der Induktion in die Natur, bei der Evidenz in den Geist verlegt [2].

Dinglers Kritik am Empirismus und seiner Methode besagt nicht, daß er es für ausgeschlossen hält, durch "Erfahrung" zu sicheren Aussagen zu gelangen, doch weist er ihnen nur einen Hic-et-nunc-Charakter zu. Ihm, der sich mit den Grundlagen der Naturwissenschaften in zahlreichen Veröffentlichungen über einen Zeitraum von 40 Jahren beschäftigt hat, entgeht jedoch nicht, daß der Mangel an wirklich bewiesenen eindeutigen Kriterien für die Aufstellung der Fundamente der rationalen Wissenschaft mit Notwendigkeit in eine "Art von Chaos" führen muß, das vorläufig nur durch eine Art von Selbsttäuschung der Wissenschaften verschleiert wird. "Wer wirklich ernst macht mit der Erkenntnis der mangelnden Kriterien, sieht, daß vorläufig die Wissenschaft nur durch eine Art stimmungsmäßiger Konvention, durch rein praktischen Verzicht darauf, die Fülle der offenen Möglichkeiten zur Auswirkung kommen zu lassen, zusammengehalten wird. [3]

Dies ist aber eine Situation, die vom Standpunkt des wissenschaftlichen Ideals sicher nicht als wünschenswert

1) H. Dingler, Methodik statt Erkenntnistheorie und Wissenschaftslehre, Kantstudien Bd. 41, 1936, S. 347
2) H. Dingler, Das System. Das philosophisch-rationale Grundproblem und die exakte Methode der Philosophie, München 1930, S. 51
3) H. Dingler, Das System, S. 14

bezeichnet werden kann. Natürlich kann man sich auf den Standpunkt stellen, es genüge, daß die Wissenschaft weiterkommt, daß sie dauernd sehr praktische Erfolge aufweist. "Das ist auch für den reinen Praktiker eine vielleicht ausreichende Möglichkeit. Nicht aber für den Philosophen und für den Wissenschaftler, der in seinem Gebiete Klarheit und Sicherheit bis zum Letzten haben will" [1]. Da für Dingler alle bisherigen Versuche einer gesicherten Grundlegung der naturwissenschaftlichen Fundamente unzureichend sind oder, wie er sich in "Zusammenbruch der Wissenschaften und der Primat der Philosophie" ausdrückt, nur ins Chaos der Meinungen, ins Meer der Unsicherheit führen, stellt sich für ihn um so dringender die Frage nach einem Ausweg aus diesen Schwierigkeiten.

Sowohl der unendliche Regreß von Allgemeinaussagen, der niemals durchlaufen werden kann, wie auch das Enden der Allgemeinaussagen in einem Zirkel scheiden für ihn als Möglichkeiten der Letztbegründung aus. Um dem unendlichen Regreß zu entgehen, muß also ein sich selbst begründendes Prinzip gefunden werden. Wenn ein Ausgangssatz voll begründet sein soll, so muß im Rückschritt der Begründungskette eine causa sui gesetzt sein. Damit muß er also die Bedingung erfüllen, sowohl Begründendes als auch Begründetes zu sein. Er muß in aktiver und passiver Weise auftreten, er muß Subjekt und Objekt sein, etwas Letztes, das nicht mehr hinterfragt werden kann.

Dieser Ansatz findet sich schon in seinen Erstschriften z. B. "Grundlagen der Naturphilosophie", 1913: "Es ist diejenige Gruppe von Tatsachen zu suchen, welche notwendig und hinreichend sind, alle übrigen durch rein logische Schlüsse daraus abzuleiten. Damit soll zunächst

1) H. Dingler, Das System, S. 14

nicht behauptet werden, daß es nur eine solche Gruppe gibt. Daß es überhaupt solche Gruppen gibt, ergibt sich durch Fortsetzung des ... Prozesses der Ausschaltung alles logisch Ableitbaren, soweit als möglich." Das genannte Ziel ergibt sich ganz automatisch aus der Tatsache, daß wir überhaupt logische Schlüsse verwenden. [1)]

Von diesem Ansatz her, in ihm gründend, wären dann konstruktiv systemhaft die Wissenschaften wieder aufzubauen, womit dann eine Lösung des Geltungsproblems gegeben wäre, da ja auf diese Weise jeder wissenschaftliche Satz bis in seine letzten Geltungswurzeln überprüft werden könnte.

Für Dingler gibt es zwei Möglichkeiten, bestehende Wissenschaften in ihren Fundamenten zu sichern:

"1) Man kann sozusagen in der Mitte anfangen (d. h. irgendwo) und von da aus nach unten und nach oben fortschreiten: nach unten, um Begründungen zu suchen, nach oben, um den Aufbau weiterzuführen. Diese Art verfolgt der heutige Positivismus und Empirismus, und man kann zeigen, daß er damit in unüberwindliche Schwierigkeiten gerät."

"2) Man kann aber auch ganz unten anfangen, was bedeutet, daß man sozusagen vom Nullpunkt aus nach oben baut." [2)]

Dingler schlägt nun den zweiten Weg, den Weg eines synthetisch-konstruktiven Aufbaus "der gesicherten Wissenschaften" ein. Die letzte Begründung von Arithmetik, Geometrie, Zeitlehre und Mechanik wird in einem Feld versucht, das vor jeder Physik liegt und damit auch nicht

1) H. Dingler, Grundlagen der Naturphilosophie, Leipzig 1913, Neudruck, Darmstadt 1967, S. 6
2) H. Dingler, Zu der Kritik des Silvio Ceccato, S. 292, Methodos Bd. 4, Milano 1952

durch sie empirisch zu begründen ist, ja es wird der Versuch unternommen, diesseits des Denkens jene grundlegenden Wissenschaften zu verankern, um im konstruktiven Aufbau ein System zu errichten, das Klarheit bis zu den letzten Fundamenten zeigt.

Jene Wissenschaft, die auf einer aufzuweisenden, nicht hintergehbaren Schicht basiert und aus der sich die Axiome der genannten Wissenschaften ergeben sollen, wird von Dingler in seinen Spätwerken exakte Fundamentalwissenschaft genannt. Hieraus ergibt sich aber sofort, daß die Weise der Exaktheit, die jene Wissenschaft für sich beansprucht, eine andere sein muß als die der axiomatischen. Es wird aber trotzdem an sie die Forderung der eindeutigen Sicherheit ihrer Aussagen über jene letzten Wurzeln der schon geleisteten Axiome gestellt, aber diese über jeden Zweifel erhabene Sicherheit darf dann nicht in Aussagen gründen. Die exakte Fundamentalwissenschaft tritt an die Stelle derjenigen philosophischen Bemühungen, die bisher sich diesem Problem zuwandten; sie tut dies mit der Absicht, eine genau begründende und begründete Wissenschaft mit strengen und eindeutigen Resultaten zu sein.

Nochmals: Als Ziel der Dinglerschen Untersuchungen steht die Gewinnung von gesicherten Aussagen, deren entscheidendes Kennzeichen die Lückenlosigkeit ihrer Gewinnung unter Einschluß der letzten Fundamente sein soll. Genauer ist dieses Ziel angestrebt in einem Tun, zu dessen Vollzug es notwendig ist, eine gesicherte Methode anzugeben, das "objektiv Wirkliche" d. h. all das, was momentan von meinem Willen unabhängig, der gemeinsamen Außenwelt angehört, geistig und manuell zu beherrschen und damit unser Tun in ein systematisches zu wenden, deren aus-

sagbare Folgen vollständig begründet sind.

Die einzige Art von Geschehen, über das ich absolute Sicherheit habe, ist das Hic-et-nunc-Geschehen, das direkte Erleben. An die Stelle von Behauptungssätzen, die als evidente Grundsätze angesehen werden, setzt Dingler einen Weg, den wohl vor ihm noch niemand beschritten hat. Er setzt jene fundamentalen Sätze primär als H a n d l u n g s a n w e i s u n g e n und sichert sie im Willen, im W i l l e n zu Eindeutigkeit, ab. Diese Schicht aber ist als letzte, fundamentale nicht mehr hintergehbar, da sie dem unmittelbaren Erleben angehört. Mit dieser Setzung des Willens als letztes Geltungsfundament erschließt Dingler einen Bereich, in dem nicht Urteile und Sätze als Basis fungieren, aus der dann weitere Sätze erschlossen werden; jenes Gebiet liegt vielmehr außerhalb "des Logischen". Der lebendige Wille, in statu actionis, als Willensimpuls, der erst gesicherte Erkenntnis, Wissenschaft will, schafft sich die zu seinen Zwecken nötigen Herstellungsregeln und Handlungsanweisungen, die erst in einem anderen Gebiet in Behauptungen übergehen, deren Fundament aber jener aktive Sollensbereich bildet, hinter den Reflexionen niemals zurückzugehen vermögen. Denn werden Willenserlebnisse retrospektiv einer näheren Betrachtung unterzogen, wird der Wille also Objekt, so ist er damit seiner aktiven Funktion enthoben als Gegenstand dieser Reflexionen, während er in seiner Aktivität unter anderem erst die Ursache für einsetzende Überlegungen bildet.

Die Aporie, daß nach Ursprung, Begründung der Logik gefragt werden muß, als jenem Bereich, in dem das Bewußtwerden, Herausstellen und Benennen derjenigen Prinzipien geleistet ist, die die Weisen der Begriffsbildung und des Schließens liefert, die Grundsätze eines Kalküls erst ermöglicht, obgleich schon a priori feststeht, daß eben je-

de Aussage in diesem Unternehmen durch Logik allererst gesichert ermöglicht wird, löst sich bei Dingler dahingehend auf, daß Grundsätze primär als Handlungsanweisungen auftreten, und in einer anderen Schicht den Charakter von Aussagen annehmen, die wiederum weitere mit den Mitteln des Schließens ermöglichen. Im Anfang war also der Willensentschluß, und zwar in passiver und aktiver Funktion, als Subjekt und Objekt der Letztbegründung.

Dinglers Vollzugsbegründung aus der Aktivität heraus gewinnt noch eine weitere Bedeutung in ihrer Erschließung des "unhintergehbaren Realen", zu dem wir in einem unmittelbaren Verhältnis stehen, da es als Realität uns ganz erfaßt und deshalb nur mangelhaft objektivierbar ist.

Der Versuch Dinglers, die Letztbegründung des Denkens und Erkennens im Handeln und Willen zu verankern, ist gerade von Mathematikerkreisen mißverstanden worden. So wurde etwa unter der Führung Hilberts ebenfalls die Evidenz als letzter Geltungsgrund verlassen, doch verweilte man im möglichen Bewegungsbereich des Annehmens, Voraussetzens und Festsetzens und gelangte so zwangsläufig zu einer formalistischen Lösung der Grundlagenproblematik. Man muß - nach Dingler - jene "Gefilde des reinen Gedankens" verlassen, wenn man gesicherte Fundamente will, und somit dem "Prinzip der pragmatischen Ordnung" folgend, das Wollen als jeder Erkenntnis Vorausgehendes konstatieren, um ihm die Tat folgen zu lassen. Doch wenn man nach der Begründung des notwendigen Vorausganges des Willens gefragt ist, so bleibt nur, wie es scheint, die Möglichkeit des Hinweisens auf ein Unhintergehbares, dessen Zugang sich Dingler durch ein "einfaches Ausschließen der rationalen Prozesse" verschaffen will.

Wenn Dingler vom Wissen der Unhintergehbarkeit des akti-

ven Willens spricht, so drängt sich sofort die Frage auf, wie sich dieses Wissen als Wissen begründen läßt. Die Antwort liegt wohl in der evidenten Einsicht, daß jeder handelnde Wille, der in einer rational völlig freien Stelle gründet, zuerst sein muß, vorausgehend jedwedem wissenschaftlichen Aufbau. Im Aussprechen dieses von ihm als unhintergehbar Erlebten, Erfahrenen, muß er sich aber der Logik bedienen, wenn seine Formulierungen überhaupt verstanden werden sollen. Dingler wird damit der Evidenz ebensowenig ledig, wie der Logik als Logischem [1]. Er unternimmt zwar den Versuch, die Letztbegründung in einem vorlogischen Gebiet zu verankern, wobei sich Evidenz und voluntaristische Pragmatik durchdringen, doch wird das Verhältnis von Sprache und Logik, welches in der Mitteilung dieses Tuns an Bedeutung gewinnt, von Dingler nicht zureichend untersucht, ja auf dieser Stufe seines methodischen Aufbaus fehlen ihm prinzipiell die Mittel hierzu.

Da er das Problem der Vollbegründung wissenschaftlicher Aussagen pragmatisch in Angriff nimmt, d. h. vom zielstrebigen Handeln ausgeht, müßte er hierzu seine Methode verlassen, einen kontemplativen Weg einschlagen und damit zumindest an jener Stelle in eine passive Zuschauerrolle verfallen. Die gesuchte und gegen alle Angriffe gesicherte Erkenntnis aber, die vor jeder exakten Wissenschaft liegen soll, also eine absolute Protowissenschaft, eine Fundamentalwissenschaft, soll durch Handeln und im Handeln, im zu tätigenden Aufbau zustande kommen. Die Aussagen dieser Grundwissenschaft bestehen dann in einer Anweisung über einen Handlungsweg, auf dem bestimmte Ziele erreicht werden sollen. Damit müssen also die Formulierungen des Handlungszieles allen weiteren folgenden Aus-

1) Siehe auch E. May, Prinzip der pragmatischen Ordnung und seine generelle philosophische Bedeutung, in H. Dingler, Gedenkbuch zum 75. Geburtstag, Herausgeber W. Krampf, München 1956.

sagen vorausgehen. Die Zielsetzung ist aber nichts anderes als ein Willenssatz, der den Plan für das weitere Voranschreiten angibt.

Zum Aufbau des eindeutigen-methodischen Systems bedarf es nun außer dem handelnden Ich zweier Elemente
a) des Materials, an dem die Handlungen auszuführen sind,
b) der Instrumente, mit denen gehandelt werden soll.
Die Errichtung des Systems ist also nicht voraussetzungslos möglich, doch müssen, um einen pragmatischen Zirkel zu vermeiden, Vorgriffe aus Einzelwissenschaften unterbleiben.

Material meint das, "was da ist, bevor ich es irgendwie verändert habe ... Wie aber kann ich wissen, ob ich etwas nicht schon verändert habe? Rechenschaft geben kann ich über eine Handlung ... nur dann, wenn diese Handlung bewußt war. Was ich aber bewußt tue und was nicht, das weiß ich unmittelbar ... Also können wir jetzt ... formulieren und definieren: Ich suche dasjenige Gegebene ..., das von mir noch nicht bewußt verändert worden ist, was also in diesem Sinne von mir noch nicht verändert berührt worden ist. Damit aber haben wir zugleich eine treffende Benennung für dieses Gesuchte und soeben Definierte gefunden: Wir wollen es als 'das Unberührte' bezeichnen. Das ist es also, was wir eigentlich mit dem Worte gegeben meinen. Und dieses Unberührte suchen wir " [1].

Die Unterscheidung zwischen dem, was bewußt getan oder unterlassen wird, ist also für Dingler ganz unmittelbar gegeben: Läßt man bewußte Veränderungshandlungen weg, sie mögen manuell oder geistig sein, etwa Auffassungen, In-

1) H. Dingler, Das Unberührte, die Definition des unmittelbar Gegebenen, Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft, 1942, S. 212

terpretationen, Deutungen usw., so zeigt sich als dieser unbearbeitete Kern unsere alltägliche Welt als Unberührtes. Jener Zustand des Verhältnisses zwischen Ich und Welt, der durch bewußte Einklammerung des Wissens und Sagens erhalten wird, läßt also den Vergleich mit Husserls Terminus Lebenswelt zu. Jener Zustand bildet für Dingler den erkenntnistheoretischen Nullpunkt, auf dem linear erst jede Erkenntnis aufzubauen ist.

Verfolgt man diesen Ausgangspunkt in seinen Schriften, so zeigt sich schon das Ringen um seine Gewinnung in einem vielfältigen Wechsel der Terminologie. Er spricht vom "Voreindeutigkeitsstandpunkt", "dem unmittelbar Gegebenen", "Tagesstandpunkt", d. h. dem Standpunkt des alltäglichen unreflektierten Lebens, dem "Vorallgemeinstandpunkt", bis hin zur endgültigen Fassung "dem Unberührten" als vorlogische Beziehungsweise zwischen Ego und Welt, in der es noch keine Widersprüche und Konstruktionen gibt, die ja erst Ergebnis einer auf höherer Stufe stehenden Wissenschaft sind. Die eigentlich primäre Welt bildet für Dingler das Unberührte, das nicht beschreibbar ist, sondern nur abgegrenzt werden kann.

Um ein System im Tun aufzubauen, muß der Absicht des Handelns die Fähigkeit hierzu pragmatisch vorausgehen. Dingler gibt einige solcher Vermögen an: Denken, Vorstellen, Erinnern, Wollen, Gebrauch der Sinnesorgane, Gebrauch der Muttersprache als primärer Sprache in aktiver Funktion zu Kommunikation mit anderen, kurz alle unmittelbaren Handlungsfähigkeiten. Er schneidet eine kritische Reflexion auf sie, wie etwa die Frage nach der Rolle der Sprache in der Anbahnung eines methodischen Vorgehens, ab, mit dem Verweis, sie seien in keinem Fall zu hintergehen. Er entzieht sich der Frage nach ihrer theoretischen Angemessenheit in der Darstellung für das von

ihm zu leistende mit ihrer rein praktischen Benutzung im Aufbau.

Sprache hat hier für Dingler lediglich die Aufgabe, Forderungsmittel zu sein, er unterläßt es, auf die Bedeutung der Sprache zu Beginn einer exakten Fundamentalwissenschaft zu reflektieren und verweist dieses Unternehmen in den späteren Aufbau.

Die genannten und von ihm als Grundfähigkeiten unseres Ich bezeichneten Vermögen sind Voraussetzungen, doch "dieses Voraussetzen ist ein rein praktisches. Etwas anderes ist die logische Voraussetzung eines Satzes oder Aussage. Aus einer logischen Voraussetzung werden logische Folgerungen gezogen, hier aber haben wir es nicht mit Sätzen zu tun, sondern mit realen Fähigkeiten, die wir einfach, so wie sie uns gegeben sind, praktisch ausüben" [1]. Wenn nun die Handlungen, die den Aufbau liefern, so geartet sein sollen, daß jeder Schritt an eine bestimmte Stelle einer Reihung eingebracht werden kann, so daß ihm nichts vorausgeht, was er erst leistet, und in ihm nichts vorausgesetzt wird, was erst an einer späteren Stelle möglich wird, so muß für den sprachlich begrifflichen Teil gefordert werden, daß ihre Begriffe eindeutig festgelegt sind.

Die Alltagssprache benutzt zwar Begriffe, die auch eine hinreichende praktische Eindeutigkeit besitzen, doch liegt der Grund für ihre nicht völlige Sicherheit nach Dingler in der nicht angebbaren Anzahl von Bestimmungen. Absolute Eindeutigkeit erzielt man erst in den Ideen, die nominalistisch aufgefaßt in ihrer Bildung durch die Grundfähigkeiten des Menschen gesichert und wegen ihrer endlichen Anzahl von Bestimmungen nicht aus der alltägli-

1) H. Dingler, Philosophie der Logik und Arithmetik, München 1931, S. 37

chen Wirklichkeit abzuziehen sind. Ideen sollen erst ein zielgerichtetes Handeln leiten.

Dingler stellt die Frage, wodurch sich diese Ideen näher bestimmen. Es sind hierzu nur solche Mittel zulässig, die schon im Unberührten vorzufinden, also ohne jegliche wissenschaftliche Konstruktion wiedererkennbar und eindeutig bestimmbar sind. Einzeleigenschaften wie rund, grün usw. sind zu Beginn des methodischen Aufbaus noch nicht eindeutig definierbar, um so die notwendig zu fordernde Eigenschaft der Wiedererkennbarkeit und Reproduzierbarkeit zu erfüllen.

"Sind also die einzelnen sinnlichen Eigenschaften nicht geeignet, so bleibt uns nur die Möglichkeit, sogenannte Relationen zur Bestimmung dieser Ideen zu verwenden" [1]. Die Relation der Verschiedenheit, mit ihren Sonderfällen der Gleichheit und Ähnlichkeit, ist für Dingler die einzige Relation, die Verwendung finden kann. Sie ist uns im vorwissenschaftlichen Bereich völlig geläufig.

Da nun die exakte Wissenschaft (im Dinglerschen Sinn) primär dazu dienen soll, die Wirklichkeit eindeutig zu beherrschen, müssen die Ideen mit der Wirklichkeit in Verbindung gesetzt und realisiert werden. Der praktische Sinn der Realisierung besteht darin, daß wir so in einem approximativen Konstruktionsprozeß Gegenstände gewinnen, welche gewisse Formen, eben die Ideen, repräsentieren, die wir theoretisch eindeutig beherrschen. Erst durch den Brückenschlag mittels der Realisierung der eindeutigen Idee auf der einen Seite und der Wirklichkeit auf der anderen, wird eine eindeutige Beherrschung dieser Seite versucht.

---

1) H. Dingler, Grundriß der methodischen Philosophie. Die Lösungen der philosophischen Hauptprobleme, Füssen 1949, S. 38

Die pragmatische Voraussetzung des Gegebenen als Rohmaterial, wie auch des Ichs als Schaffendes, Konstruierendes ist für Dingler Gegebenheit. Um den Aufbau schrittweise synthetisch auf möglichst einfachen Ideen zu errichten, setzt Dingler an den Anfang jene Idee, auf welche die Relation der Verschiedenheit nur ein einziges Mal angewandt wird, und gleichzeitig die einzige Eigenschaft ist, die jene Idee besitzt.

Es ergibt sich: "Etwas Unterschiedenes überhaupt." [1]
Das "Urschema" lautet dann:

a) Etwas Unterschiedenes überhaupt, konstant: Arithmetik.
b) Etwas Unterschiedenes überhaupt, variabel: Analysis.
c) Etwas Unterschiedenes überhaupt, betrachtet hinsichtlich seiner Grenze gegenüber dem Hintergrund, konstant: Geometrie.
d) Etwas Unterschiedenes überhaupt, betrachtet hinsichtlich seiner Grenze gegenüber dem Hintergrund, variabel: Mechanik.

Auf den weiteren Aufbau soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Dingler formuliert ein "Definitions- oder Herstellungsapriori", das besagt:

1) Die für die Erfassung der Wirklichkeit notwendigen Formen werden im Bewußtsein a priori vorgefunden.
2) Diese Formen des Bewußtseins müssen nun zur Erfassung der Wirklichkeit in ihr selbst hergestellt werden.

Die Formen werden also als Forderungen (Postulate) vom handelnden Individuum definiert, die Definitionen sind Handlungsanweisungen. Als solche besitzen sie zugleich den Charakter von Ideen, nach denen die Wirklichkeit ge-

1) Siehe zur Klärung der verwendeten Begriffe und für den weiteren Aufbau, H. Dingler, Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft, herausgegeben von P. Lorenzen, München 1964.

sichert beherrscht werden soll. Durch den vorher erläuterten Willensakt wird also aus der Zahl möglicher Hohlformen ein besonderes System herausgehoben, das in seiner Gesamtheit als Handlungsgerüst zur Erfassung der Wirklichkeit im Sinne der Beherrschung in sie mittels Realisation hineinzutragen ist. Mit der dargelegten Festlegung auf absolute Sicherheit ist aber eine mögliche Wahl zwischen gleichberechtigten Alternativen abgeschnitten und damit die Distanzierung von einer konventionalistischen Richtung Poincaréscher Prägung vollzogen.

Das Neuartige des Herstellungsapriori liegt also in der starken Betonung des Handelns, deren Tendenz seinen besonderen Ausdruck findet in der überspitzten Aussage, Wissenschaft müsse als Tathandlung und nicht als Erkenntnishandlung aufgebaut werden. Es sei hier angemerkt, daß diese Dinglerschen Intentionen durch seine theoretischen Begründungsbemühungen oft verwischt werden, ja dem aktiven Aufbau im Wege stehen. Gerade darin liegt eine der Bemühungen Lorenzens in der Aufnahme Dinglerscher Ansätze.

c) Kritische Bemerkungen zu Dinglers Methode; ihre modifizierte Übernahme durch Lorenzen

Dinglers Lösungsversuch der Begründung exakter Wissenschaften ist anzusehen als "kritischer Voluntarismus". Er verlegt den Anfang der Gewinnung exakter Wissenschaften in den Willen, in freier Willensentscheidung werden die ersten Allgemeinaussagen gesetzt. Wille meint nicht einen Begriff irgendeiner philosophischen oder psychologisch orientierten Theorie, sondern eine Fähigkeit, deren Ausübung zu unseren Grundfähigkeiten gehört, deren

sich der Mensch immer schon bedienen kann.

Die Abhängigkeit des Willens von irgendwelchen Bedingungen aufzuzeigen, setzt selbst schon wieder eine willensfundierte Entscheidung voraus, die darin besteht, eben die Abhängigkeit des Willens aufzudecken. Die Einführung des Willens bei Dingler hat lediglich die Funktion, Wissenschaft als nachträglich einer vorausgehenden menschlichen Handlung aufzuweisen. Wissenschaft gründet in der Fähigkeit, Handlungen ausüben zu können und zu wollen. Damit ist aber gleichzeitig ein Aufforderungscharakter verbunden: jegliche Passivität muß durchbrochen werden, um so Wissenschaft handelnd zu errichten.

In Schwierigkeiten gelangt nun aber Dingler, wenn er meint, durch einen Willensentschluß zu allgemein gültigen Aussagen zu gelangen. Im Vorfeld der Erörterungen der Möglichkeiten von Allaussagen und ihrer Erkenntnis benutzt er selbst schon Allaussagen: Er spricht von "unserem Willen", "unseren Fähigkeiten". Er versucht, vor einem aktiven Aufbau der Wissenschaften vorweg schon alle zu vollziehenden Schritte zu begründen, und muß sich damit den Einwand nach der Begründung seiner eigenen Methode gefallen lassen.

Der Aufbau der Geometrie, Arithmetik und Logik durch Lorenzen versucht einen Ausweg aus den Schwierigkeiten Dinglerschen Argumentierens. Hier sind an den Anfang des systematischen Aufbaus die kritischen Reflexionen über Termini, geregeltes Handeln, dialogdefinite Aussagen usw. gesetzt. Sie dienen der Vermeidung eines naiven Gebrauchs der Bildungssprache. Lorenzen beabsichtigt, durch Einüben geregelter Handlungen, eben durch den aktiven Aufbau selbst, die Fragen eines an der Tradition geschulten Denkens nach der theoretischen Begründung für die Wahl des

methodischen Anfangs abzuwehren.

Dingler weiß zwar um die Unmöglichkeit des Versuchs, vor einem geleisteten Aufbau der Wissenschaft im Sinne seiner Absichten eben die methodischen Hilfsmittel selbst zu begründen, trotzdem unterliegt er immer wieder der Versuchung, sie umgangssprachlich zu rechtfertigen. Seine Argumentationsweisen sind dabei nicht an einem Verfahren rationalen Argumentierens, wie es in den Ansätzen hier vorgestellt wurde, ausgerichtet. Die Sprache selbst und ihre Verwendung in Argumentationsdisputen wird unkritisch übernommen, die Notwendigkeit einer geregelten Dialogform nicht gesehen. Genau in diesem Ansatz aber unterscheidet sich Lorenzen wesentlich von Dingler.

Lorenzen versucht, ohne die traditionellen Elemente auszukommen, dem Dinglerschen Dualismus von Wille und Unberührtem zu entgehen und den in dessen Methode enthaltenen operativen Ansatz zu verwirklichen, und zwar in der Weise, daß seine praktische Tragfähigkeit keiner theoretischen Begründung mehr bedarf.

d) Dinglers Aufbau der euklidischen Geometrie als ein Versuch, die unmittelbare Verbindung mit dem manuellen Herstellungsverfahren geometrischer Formen zu leisten; Geometrie als Weise menschlicher Produktivität

Schon im vorwissenschaftlichen Bereich (Alltagsleben) haben wir geläufigen Umgang mit Körpern und Oberflächen. Daran anknüpfend verwendet Dingler sie als undefinierte Begriffe; er übernimmt sie unmittelbar der "qualitativen Anschauung", dem Erlebnisbereich des Alltags [1]. Die Be-

1) Siehe etwa Dingler, Die Ergreifung des Wirklichen, Frankfurt a. M. 1969, S. 131 ff. oder auch an vielen anderen Stellen im größten Teil der Schriften seines umfangreichen Werkes.

griffe Körper und Oberfläche werden im fortschreitenden Aufbau "gefiltert" mit der Absicht, die Anzahl der Bestimmungen zu reduzieren, alle überflüssigen Umstände zu beseitigen. Die Aufgabe besteht darin, Körper und Oberfläche von den spezifischen Eigenschaften des Stoffes zu befreien, um damit die reine Gestalt zu erhalten.

Die Fläche wird nun so bestimmt, daß
1) sie im ganzen als auch an irgendeiner Stelle,
2) ihre beiden Seiten (Ober- bzw. Unterseite) keine angebbaren Verschiedenheiten aufweisen. Eine solche Fläche heiße Ebene.

Diese Bestimmungen sind durch die entsprechenden Homogenitätsprinzipien Lorenzens präzisiert worden.

Zur Festlegung dieser ersten Gestalt im Aufbau der Geometrie nach Dingler kommt der Relation der Ununterscheidbarkeit eine besondere Bedeutung zu. Dingler versucht, im schrittweisen Aufbau der Geometrie die euklidische Ebene allein durch direkte Vergleichsrelationen - wie Gleichheiten, Verschiedenheiten, Ähnlichkeiten - zu realisieren. Seinem methodischen Ansatz folgend, kann er sich nur auf solche Mittel stützen, die zu unseren Grundfähigkeiten gehören.

Das Ziel des Dinglerschen Unternehmens ist es, unter Verwendung vorsystematischer Begriffe, vermittelt durch Grundfähigkeiten, den Aufbau und Anschluß an die euklidischen Axiome zu leisten. Doch muß dieser Versuch, ebenso die hiermit verwandten Bemühungen Lorenzens - von ihm übrigens ausdrücklich bemerkt -, in diesem Punkt noch als unvollendet angesehen werden. Aus dem weiteren Dinglerschen Aufbau sei noch mitgeteilt, daß man eine Gerade durch den Schnitt zweier Ebenen festlegt; der Schnitt zweier Geraden liefert den Punkt. Auf ein weiteres Ein-

gehen der Durchführung sei hier verzichtet, da hierzu die präzisen Formulierungen Lorenzens besser geeignet erscheinen.

Doch welche Rolle spielt das Operative, die Handlung im Aufbau der Geometrie Dinglers? "Unsere Festlegung der Ebene stellt also nicht eine Definition als abstrakte logische Beziehung zu anderen Begriffen dar, sondern eine unmittelbar im Realen sinnhafte H a n d l u n g s a n w e i s u n g mit Ausdrücken der unmittelbaren Sprache, die sich auf unmittelbar ausführbare Grundfähigkeiten unseres unmittelbaren Handelns beziehen" [1]. Am Anfang stehen also in Dinglers Anordnung definitionsartige Aussagen, welche den unmittelbaren Kontakt mit der Realität liefern sollen. Mit ihnen wird die praktische Ausführung von Handlungen qualitativ festgelegt, um die Herstellung der betreffenden Formen zu bezwecken. So erfolgt etwa die Herstellung einer "Ebene" in feinmechanischen Werkstätten durch das wechselseitige Abschleifen von drei Stahlplatten a, b, c: "Es ist klar, daß dieses Vorgehen genau die Realisierung unserer oben benutzten Ebenendefinition darstellt. Denn liege etwa b auf a, so stellt b die Oberseite, a die Unterseite einer Ebene dar. Liegt b auf c, so muß wieder c die Unterseite dieser gleichen Ebene sein. Liegt dann auch a auf c, dann heißt das, daß die Oberseite dieser Ebene mit der Unterseite identisch ist, daß beide beliebig verwechselt werden können, daß sie ununterscheidbar sind, und zwar wegen der Schleifbewegung in jeder beliebigen Lage, an jeder beliebigen Stelle und für jedes beliebige Stück. Dies aber war ja unsere Definition der Ebene" [2].

Der logische Gang ist nun der, daß diese definitionsarti-

1) H. Dingler, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1933, S. 13
2) H. Dingler, a. a. O., S. 38 f.

gen Festlegungen so beschaffen sein müssen, daß sie vom rein logischen Gesichtspunkt a u c h die Stelle von Axiomen oder Axiomgruppen vertreten. Dingler und auch Lorenzen bemühen sich um das Auffinden genau derjenigen Definitionen, welche operativ die euklidischen Grundformen exakt festlegen [1].

Die Ausgangssätze der euklidischen Geometrie sollen demnach sein:

1) praktische Anweisungen für die manuelle Herstellung der Grundformen der Geometrie. Die Sonderstellung der euklidischen Geometrie zeigt sich darin, daß sie allein die Ideen enthält, die zur Herstellung von Meßinstrumenten notwendig sind. Dingler zeigt dies in genauen Analysen der dazu verwendeten Handlungen. Das spricht natürlich nicht gegen die Verwendung von nichteuklidischen Geometrien zur Verknüpfung von Meßergebnissen, doch sind diesen die Operationen zur Herstellung der Meßapparate pragmatisch vorgeordnet. Genau an dieser Stelle zeigt sich durch Dingler der Versuch der Zurückweisung des Konventionalismus.

2) Indem sie mit einem Namen die betreffenden Grundformen benennen, deren Herstellung vermitteln, sind sie auch zugleich Definitionen derselben.

3) Sie erfüllen dann die logische Rolle von Axiomen, wenn aus ihnen logische Folgerungen gezogen werden können, die mit der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie zusammenfallen.

Gelingt es, die Ausgangssätze so zu wählen, daß sie zu-

1) Es sei hierzu auch auf die Ausführungen in § 2 dieser Arbeit verwiesen.

gleich allen drei Funktionen genügen, so wäre damit ein entscheidender Beitrag geliefert, die erkenntnistheoretischen, physikalischen und logischen Schwierigkeiten zu überwinden, welche die Grundlagen der Geometrie beherrschen. Für das Lehren und Lernen der euklidischen Geometrie träfe dann, wegen der herausragenden Funktion des Operativen, der engen Verbindung zum Manuellen, das zu, was vorher schon bei der Behandlung von Logik und Mathematik mitgeteilt wurde.

Euklidische Geometrie nach Dingler - Lorenzen soll demnach ein ideales Gebilde sein, das sich auf gewissen Bestimmungsprinzipien linear aufbaut und dessen Verhältnis zur Realität darin besteht, daß diese Prinzipien als Herstellungsanweisungen angesehen werden, nach denen die Ideen zu realisieren sind [1]. Damit wird also versucht, Antwort zu geben auf die Frage nach der Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik. Geometrie steht demnach nicht als r e i n mathematische Disziplin zur Diskussion.

Dingler hat nun aber nicht immer klar unterschieden zwischen zwei Begründungsproblemen:

1) Die Begründung einer technisch-praktischen Geometrie, wie sie etwa zur Herstellung von Meßinstrumenten verwendet wird. Sie muß notwendig die Ungenauigkeit aller materiellen geometrischen Gebilde berücksichtigen.

2) Die Begründung einer idealen Geometrie. Sie beschäftigt sich mit anschaulichen Gestalten, insoweit diese bis zur vollständigen Genauigkeit im Sinne Platons idealisiert sind.

1) Diese Realisation gelingt in der Wirklichkeit selbstverständlich nur unvollkommen. Siehe hierzu auch das vorher Gesagte über den Zusammenhang mit der allgemeinen Relativitätstheorie.

Während die erste Aufgabe ohne Rücksicht auf Erfahrung nicht zu lösen ist, bewegt sich die zweite in einer apriorischen Formenwelt. Die erste hat die Realisierung der in der zweiten gelieferten Ideen zu ihrem Thema und schließt sich damit den allgemeinen Überlegungen Platons zu diesem Problem an: Beide Begründungen stehen also in der angegebenen Abhängigkeit.

Um eine Begründung der technisch-praktischen Geometrie zu leisten, müssen geeignete starre Körper geschaffen werden, die es erlauben, Entfernungen zu messen. Dazu stellte Helmholtz dann die Grundforderung der freien Beweglichkeit auf, die sich mathematisch - nach Lie - durch die Invarianz gegenüber der Gruppe der Bewegungen ausdrücken läßt [1].

Die zweite Aufgabe verlangt, daß die Geometrie zwar anschaulich, aber unabhängig von der physikalischen Erfahrung konstituiert wird. Zur Begründung einer solchen geometrischen Theorie gehen Dingler und ihm folgend Lorenzen vom Symmetrie- oder Homogenitätsprinzip aus, das sich schon in der griechischen Mathematik findet [2].

In der Dinglerschen operativen Einführung der geometrisch anschaulichen Grundgebilde, d. h. der Angabe eines Herstellungsverfahrens für sie, berühren sich die beiden Begründungsprobleme. Aber Dingler liefert kein idealisierbares Verfahren für die Parallelität, das vergleichbar ist mit der Herstellung der Ebene und der Orthogonalität.

1) Eben jene freie Beweglichkeit gilt nach den Aussagen der allgemeinen Relativitätstheorie für den physikalischen Raum - freilich nur in kosmischen Dimensionen entscheidend - nicht mehr. Siehe hierzu Mittelstaedt, Philosophische Probleme der Physik, S. 45 ff.

2) Siehe hierzu O. Becker, Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik, philosophia naturalis 8, 1964.

Soweit bekannt ist, erreicht man die Konstruktion paralleler Ebenen nur auf indirektem Weg über die Orthogonalität. Aber die Existenz und Eindeutigkeit des Parallelismus wird dabei nicht durch Konstruktion erzwungen, sie schleicht sich vielmehr als "deus ex machina" ein und dies so lange, bis ein Herstellungsverfahren gefunden ist, das eben nicht schon stillschweigend von der euklidischen Struktur des Raumes Gebrauch macht [1].

Auch der Begriff des starren Körpers reicht nicht aus als Grundlage zur Begründung einer Geometrie, die sich mit räumlichen Betrachtungen der Physik beschäftigt; denn nur durch Lichtstrahlen oder allgemein Trägheitsbahnen können genügend große Figuren realisiert werden. Sie erst vermögen eine Entscheidung über die Struktur des Weltraumes zu liefern.

Im Zusammenhang mit dem Dinglerschen Operationalismus muß auch noch kurz P. W. Bridgeman erwähnt werden, dessen Operationalismus insbesondere in der amerikanischen Wissenschaftstheorie sehr verbreitet ist. Sein Ansatz, die Bedeutungsgebung von Begriffen durch konkrete Handlungen zu vollziehen, soll hier am Beispiel der Länge eines Objektes exemplarisch mitgeteilt sein: "We evidently know what we mean by length if we can tell what the length of any and every object is, and for the physicist nothing more is required. To find the length of an object, we have to perform certain physical operations. The concept of length is therefore fixed when the operations by which length is measured are fixed: that is, the concept of length involves as much and nothing more than the set of operations by which length is determined. In general, we can mean by any concept nothing

1) Siehe zu einer genaueren Analyse auch O. Becker, Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik

more than a set of operations; the concept is synonymous with the corresponding set of operations" [1]. Dieser Ansatz wird von ihm später dann abgeschwächt in der Weise, daß das operative Vorgehen lediglich als Definitionsmethode fungiert; "I can see no reason why the operational method should have any inhibiting effect of any legitimate theorizing, ... and in so far as it has any effect at all, it can be only benificial because it increases precision" [2].

Es sei zum Schluß bemerkt, daß sich die Sonderrolle der euklidischen anschaulichen idealen Geometrie etwa nach O. Becker [3] phänomenologisch begründen läßt. Doch machen diese sicherlich auch didaktisch zu verwertenden Untersuchungen nur eine Aussage über die Struktur der sinnlichen Anschauung; ihre Notwendigkeit entfällt für nicht mehr unmittelbar wahrnehmbare kosmische und atomare Bereiche [4].

---

1) P. W. Bridgeman, The logic of modern physics, New York 1927, S. 6
2) P. W. Bridgeman, Some general principles of operational analysis, in: Symposium on operationism, Psychol. Rev., 52, 1945, S. 248
3) O. Becker, Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik, oder auch E. Ströker, Philosophische Untersuchungen zum Raum
4) Hierfür ist auch der Aufsatz von O. Becker, Die Apriorische Struktur des Anschauungsraumes, Philos. Anzeiger Bd. 4, 1929 - 1930, S. 129 - 162 von Wichtigkeit. Seine didaktische Bedeutung liegt in dem Versuch, die Euklidizität des Anschauungsraumes nachzuweisen, um somit einen Beitrag zu leisten zur Beantwortung der Frage, in welcher Weise sich eine mögliche anschauliche Auszeichnung der euklidischen Geometrie begründen läßt.

Literaturverzeichnis

Aristoteles — Aristoteles Werke, Leipzig 1854.

Becker, O. — Mathematische Existenz Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung VI, 1923.

Die Apriorische Struktur des Anschauungsraumes, Philos. Anzeiger Bd. 4, 1929 - 1930.

Grundlagen der Mathematik, Freiburg - München 1954.

Größe und Grenze der mathematischen Denkweise, München 1959.

Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik, philosophia naturalis Bd. 8, 1964.

Beth, E. W. — Semantic Entailment and Formal Derivability, Mededelingen d. Kon. Ned. Akad. v. Wet., vol. 18, no. 13, Amsterdam 1955.

Beth, E. W. — The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959.

Bierwisch, M. — Einige semantische Universalien in deutschen Adjektiven, in: Vorschläge für eine strukturale Grammatik des Deutschen, Hrsg. H. Steger, Darmstadt 1970.

Bochenski, I. M. — Grundriß der Logistik, Paderborn 1962.

Bornhausen, K. — Pascal, Esprit géométrique, Basel 1920.

Bridgeman, P. W. — The logic of modern physics, New York 1927.

Some general principles of operational analysis, Symposium on operationism, Psych. Rev., 52, 1945.

Brouwer, L. E. J. — Over de groondslagen der wiskunde, Amsterdam 1907.

Descartes — La Géométrie, 1657.

Dienes, Z. P. — Aufbau der Mathematik, Freiburg 1965.

Dingler, H. — Grundlagen der Naturphilosophie, Leipzig 1913, Neudruck, Darmstadt 1967.

Dingler, H. Das System. Das philosophisch-rationale Grundproblem und die exakte Methode der Philosophie, München 1930.

Philosophie der Logik und Arithmetik, München 1931.

Die Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1933.

Methodik statt Erkenntnistheorie und Wissenschaftslehre, Kantstudien Bd. 41, 1936.

Das Unberührte, die Definition des unmittelbar Gegebenen, Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft 1942.

Grundriß der methodischen Philosophie. Die Lösungen der philosophischen Hauptprobleme, Füssen 1949.

Zu der Kritik des Silvio Ceccato, Methodos Bd. 4, Milano 1952.

Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft, Hrsg. P. Lorenzen, München 1964.

Die Ergreifung des Wirklichen, Frankfurt a. M. 1969.

Eley, L. — Metakritik der Formalen Logik, Den Haag 1969.

Frege, G. — Funktion, Begriff, Bedeutung, Fünf logische Studien, Hrsg. G. Patzig, Göttingen 1966.

Gentzen, G. — Untersuchungen über das logische Schließen, Mathem. Zeitschrift, 39, 1934.

Heidegger, M. — Sein und Zeit, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung VI 1923.

Helmholtz, H. — Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, Nachrichten v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wiss. u. d. Georg-Augustus-Universität 1868.

Hermes, H. — Zum Inversionsprinzip der operativen Logik, in: Constructivity in Mathematics, Hrsg. A. Heyting, Amsterdam 1959.

Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1961.

Heyting, A. — Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss. phys. math. Klasse, 1930.

Inhetveen, R. — Naive und konstruktive Mengenlehre in der Schule, Der Mathematikunterricht, Jhrg. 17, Heft 1, 1970.

Janich, P. — Die Protophysik der Zeit, Mannheim 1969.

Wie empirisch ist die Physik?, philosophia naturalis, Bd. 13.

Kambartel, F. — Erfahrung und Struktur, Frankfurt a. M. 1968.

Kamlah, W. - Lorenzen, P. — Logische Propädeutik, Mannheim 1967.

Kant, I — Kritik der reinen Vernunft Phil. Bibl. Bd. 37a, Hamburg 1956.

Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte, 1747, § 10.

Kirsch, A. — Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren, Math. Phys. Semesterberichte, Bd. XVII, 1970.

Kolmogorow, A. N. — Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Mathem. Zeitschrift 25, 1932.

Lang, M. — Wittgensteins Philosophische Grammatik, Entstehung und Perspektiven der Strategie eines radikalen Aufklärers, Dissertation Köln 1971.

Leibniz — Philosophische Schriften ed. Gerhard VII, Berlin 1875 - 90.

Levy-Brühl — Das Denken der Naturvölker, Leipzig - Wien 1921.

Lorenz, K. — Arithmetik und Logik der Spiele, Dissertation Kiel 1961.

Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen, Archiv f. math. Logik und Grundlagenforschung 11 (1968).

Lorenzen, P. — Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955.

Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium, in: Infinitist Methods, Proceedings of the Symposium on Foundation of Mathematics, Warsaw 1959 (Oxford 1961).

Lorenzen, P. Metamathematik,
Mannheim 1962.

Differential und Integral,
Frankfurt a. M. 1965.

Formale Logik,
3. Aufl. Berlin 1967.

Methodisches Denken,
Frankfurt a. M. 1968.

Normative Logic and Ethics,
Mannheim 1969.

Maurer, H. Theoretische Grundlagen der
Programmiersprachen,
Mannheim 1969.

May, E. Prinzip der pragmatischen Ordnung und seine generelle philosophische Bedeutung,
in: H. Dingler, Gedenkbuch zum 75. Geburtstag,
Hrsg. W. Krampf, München 1956.

Mittelstaedt, P. Untersuchungen zur Quantenlogik,
Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss., München 1959.

Über die Gültigkeit der Logik in der Natur,
Naturwissenschaften 47, 385 (1960).

Mittelstaedt, P. — Quantenlogik, Fortschritte d. Physik, 9, 106 (1961).

Philosophische Probleme der Physik, 2. Aufl., Mannheim 1966.

Klassische Mechanik, Mannheim 1970.

Mittelstraß, J. — Die Prädikation und die Wiederkehr des Gleichen, Ratio, Bd. 10, 1968.

Peano, G. — Formulaire de Mathématique, Turin 1894 / 1908.

Stenzel, J. — Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig - Berlin 1924.

Ströker, E. — Philosophische Untersuchungen zum Raum, Frankfurt a. M. 1965.

Wedburg, A. — Plato's philosophy of mathematics, Stockholm 1955.

Weyl, H. — Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1928.

Wittgenstein, L. — Tractatus logico-philosophicus, 1918, Schriften I, Frankfurt a. M. 1960.

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Oxford 1956.

Philosophische Grammatik, Schriften IV, Frankfurt a. M. 1969.

Wittmann, E. — Die Mengenlehre und der Mathematikunterricht in der Grundschule, Der Mathematikunterricht, Jhrg. 17, Heft 1, 1970.

Zeuthen, H. G. — Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896.

Lebenslauf

Rudolf Jeuck, geb. 10. 6. 1944 in Grube Wohlfahrt (Schleiden) als Sohn des Bäckermeisters Hermann Jeuck und seiner Frau Anna.
1950 bis 1954 Besuch der Grundschule in Köln - Neu-Ehrenfeld,
1954 bis 1963 math.-naturw. Humboldt-Gymnasium in Köln.
SS 1963 bis SS 1969 Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Universität zu Köln bei den Professoren Eley, Landgrebe, Lauterjung, C. Meyer, Mittelstaedt, Schäfke, Wagner, Zimmermann.
SS 1969 Erste Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen in Mathematik bei Herrn Prof. Dr. C. Meyer.
1. 1. 1970 bis 31. 1. 1971 wiss. Mitarbeiter (DFG) von Herrn Prof. Dr. Landgrebe am Husserl-Archiv der Universität zu Köln.
Tätigkeit am Husserl-Archiv: Editions-Vorbereitung der mathematisch-philosophischen Nachlaßschriften Husserls in der Reihe Husserliana.
Seit 1. 2. 1971 wiss. Assistent am Seminar für Mathematik und deren Didaktik der Pädagogischen Hochschule Ruhr (Abteilung Duisburg).

Druck: Walter Kleikamp, Köln-Sülz, Zülpicher Straße 205, Ruf 442372